

٢-١ المستقيمان والقاطع
Parallel lines and Trans veral

والآن:
- أتعرّف العلاقات بين مستقيمين أو مستويين.
- أسمي أزواج الزوايا الناتجة عن مستقيمين متوازيين وقاطع.

المفردات
المستقيمان المتوازيان
parallel lines

المستقيمان المتخالفان
skew lines

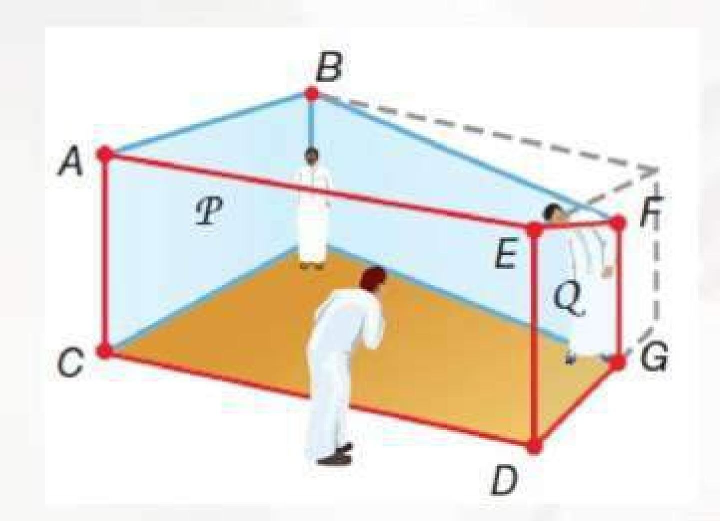
المستويان المتوازيان
parallel planes

القاطع
transversal

الزوايا الداخلية
interior angles

الزوايا الخارجية
exterior angles

لماذا؟
تُظهر غُرفة الخداع البصري أن الشخص الواقف في الزاوية اليمنى أكبر من الشخص الواقف في الزاوية اليسرى. وفي المنظر الأمامي، يبدو الحائطان الأمامي والخلفي متوازيين على حين أنهما ليسا كذلك. ويبدو السقف والأرضية أفقيين، ولكنهما في الحقيقة ليسا أفقيين.



العلاقات بين المستقيمات والمستويات: استُعمِلتْ مستقيمات متوازية ومتقاطعة ومتخالفة بالإضافة إلى مستويات متقاطعة وأخرى متوازية لإنشاء غرفة الخداع كما يتضح في المخطط المجاور.





حدد كلا مما ياتي مستعملا الشكل المجاور :

1A) جميع القطع المستقيمة التي تخالف $\overleftrightarrow{BC}$.

$\overline{EH}$, $\overline{GF}$, $\overline{ED}$, $\overline{FA}$

1B) قطعة مستقيمة توازي $\overline{EH}$.

إجابة ممكنة: $\overline{AB}$

1C) جميع المستويات التي توازي المستوى DCH .

المستوى ABG





علاقات أزواج الزوايا الناتجة عن القاطع: **القاطع** هو المستقيم الذي يقطع مستقيمين أو أكثر في المستوى نفسه وفي نقاط مختلفة. ففي الشكل أدناه، المستقيم t قاطع للمستقيمين q, r. لاحظ أن المستقيم t يشكّل ثماني زوايا مع المستقيمين q, r. وأزواج محددة من هذه الزوايا لها أسماء خاصة.

تنبيه!

التوازي والتخالف

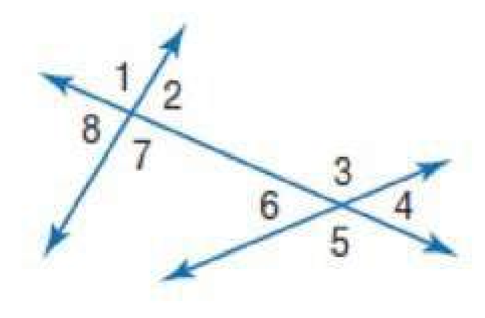
في تمرين تحقق من فهمك 1A: $\overleftrightarrow{FE}$ لا يخالف $\overleftrightarrow{BC}$ بل يوازيه، وذلك في المستوى BCF.

B C F E



مثال 2 تصنيف علاقات أزواج الزوايا

مستعملًا الشكل المجاور، صنِّف كل زوج من الزوايا فيما يأتي إلى زاويتين متبادلتين داخليًّا، أو متبادلتين خارجيًّا، أو متناظرتين، أو متحالفتين:



a) $\angle 5$ و $\angle 1$

متبادلتان خارجيًّا

b) $\angle 7$ و $\angle 6$

متحالفتان

c) $\angle 4$ و $\angle 2$

متناظرتان

d) $\angle 6$ و $\angle 2$

متبادلتان داخليًّا

تحقق من فهمك

2A) $\angle 3$ و $\angle 7$ 2B) $\angle 5$ و $\angle 7$ 2C) $\angle 4$ و $\angle 8$ 2D) $\angle 2$ و $\angle 3$

2A) متبادلتان داخليًّا 2B) متناظرتان 2C) متبادلتان خارجيًّا 2D) متحالفتان



3A) $\angle 3$ و $\angle 5$

3B) $\angle 2$ و $\angle 8$

3A) المستقيم j؛ متبادلتان خارجيًّا

3B) المستقيم ℓ؛ متبادلتان داخليًّا

3C) $\angle 5$ و $\angle 7$

3D) $\angle 2$ و $\angle 9$

3C) المستقيم k؛ متناظرتان

3D) المستقيم ℓ؛ متحالفتان







حدد كلًّا مما يأتي مستعملًا متوازي المستطيلات في الشكل المجاور :

1) جميع القطع المستقيمة التي توازي $\overline{SV}$. $\overline{YX}$, $\overline{TU}$, $\overline{ZW}$

2) مستوى يوازي المستوى ZWX . TUV

3) قطعة مستقيمة تخالف $\overline{TS}$ وتحتوي على النقطة W . $\overline{WZ}$, $\overline{WU}$



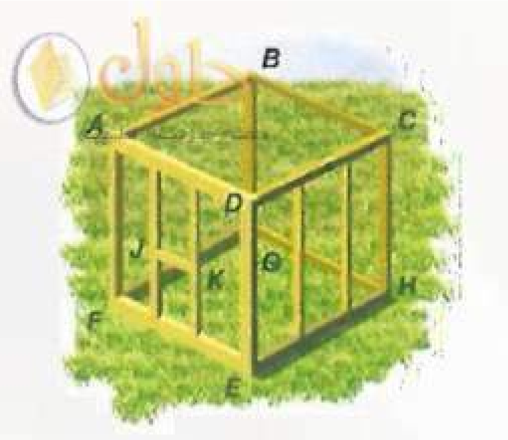
4) **إنشاءات:** استعمل الشكل المجاور لتحديد كلٍّ مما يأتي :

a) ثلاثة أزواج من المستويات المتوازية.



المستوى ABCD يوازي المستوى FGHE ؛ المستوى ADEF يوازي المستوى BCHG ؛ المستوى DCHE يوازي المستوى ABGF



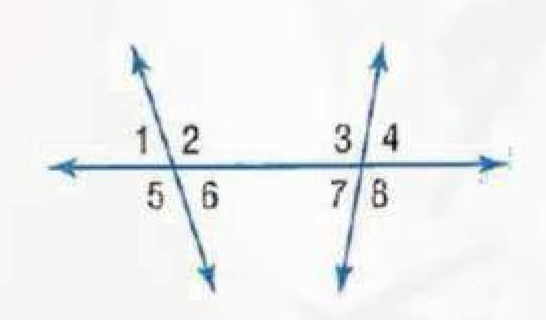


b) ثلاث قطع مستقيمة توازي $\overline{DE}$. $\overline{CH}, \overline{BG}, \overline{AF}$

c) قطعتين مستقيمتين توازيان $\overline{FE}$. **إجابة ممكنة:** $\overline{BC}$ و $\overline{AD}$

d) زوجين من القطع المستقيمة المتخالفة. **إجابة ممكنة:** $\overline{JK}$ و $\overline{BG}$ ، $\overline{JK}$ و $\overline{CH}$

مستعملًا الشكل المجاور، صنِّف كل زوج من الزوايا فيما يأتي إلى زاويتين متبادلتين داخليًّا، أو متبادلتين خارجيًّا، أو متناظرتين، أو متحالفتين.



5) $\angle 1$ و $\angle 8$

متبادلتان خارجياً

6) $\angle 2$ و $\angle 4$

متناظرتين

7) $\angle 3$ و $\angle 6$

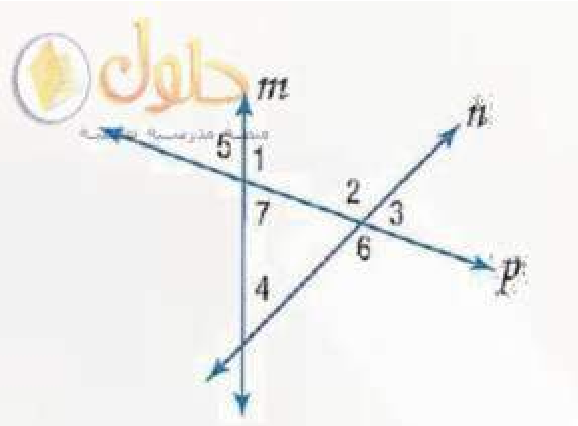
متبادلتان داخلياً

8) $\angle 6$ و $\angle 7$

متحالفتان

استعمل الشكل المجاور لتحدد القاطع الذي يصل بين كل زوج من الزوايا فيما يأتي، ثم صنِّف زوج الزوايا إلى زاويتين متبادلتين داخليًّا، أو متبادلتين خارجيًّا، أو متناظرتين، أو متحالفتين:





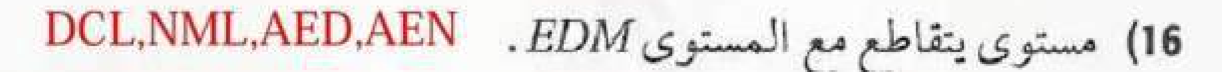


9) $\angle 2$ و $\angle 4$ المستقيم n؛ متناظرتان

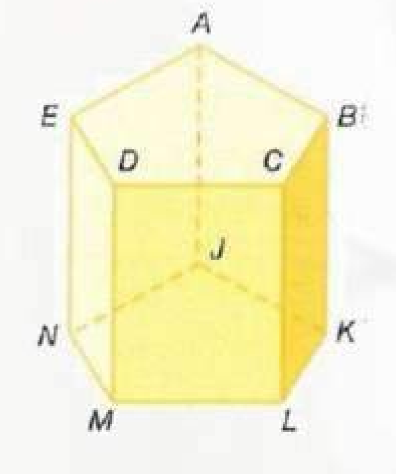
10) $\angle 5$ و $\angle 6$ المستقيم p؛ متبادلتان خارجياً

11) $\angle 4$ و $\angle 7$ المستقيم m؛ متحالفتان

12) $\angle 2$ و $\angle 7$ المستقيم p؛ متبادلتان داخلياً



حدد كلًا مما يأتي مستعملًا الشكل المجاور :



13) جميع القطع المستقيمة التي توازي $\overline{DM}$. $\overline{CL}, \overline{EN}, \overline{BK}, \overline{AJ}$

14) مستوى يوازي المستوى ACD. JLM

15) قطعة مستقيمة تخالف $\overline{BC}$. $\overline{EN}$

16) مستوى يتقاطع مع المستوى EDM. DCL,NML,AED,AEN

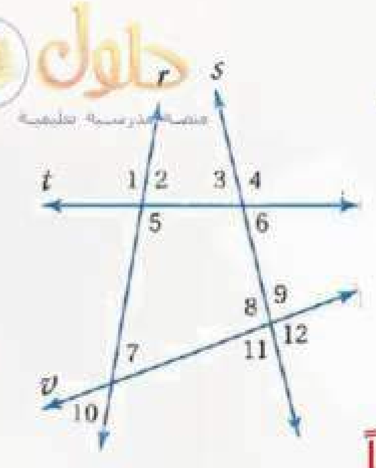
17) جميع القطع المستقيمة التي تخالف $\overline{AE}$. KL,CL,BK,ML,DM,NM,KJ

18) قطعة مستقيمة توازي $\overline{EN}$. $\overline{AJ}$

19) قطعة مستقيمة توازي $\overline{AB}$ وتمر بالنقطة J. $\overline{JK}$

20) قطعة مستقيمة تخالف $\overline{CL}$ وتمر بالنقطة E. $\overline{AE}$





مستعملًا الشكل المجاور، صنِّف كل زوج من الزوايا فيما يأتي إلى زاويتين متبادلتين داخليًّا، أو متبادلتين خارجيًّا، أو متناظرتين، أو متحالفتين.

21) $\angle 4$ و $\angle 9$ متناظرتين

22) $\angle 5$ و $\angle 7$ متحالفتان

23) $\angle 3$ و $\angle 5$ متبادلتان داخلياً

24) $\angle 10$ و $\angle 11$ متناظرتين

25) $\angle 1$ و $\angle 6$ متبادلتان خارجياً

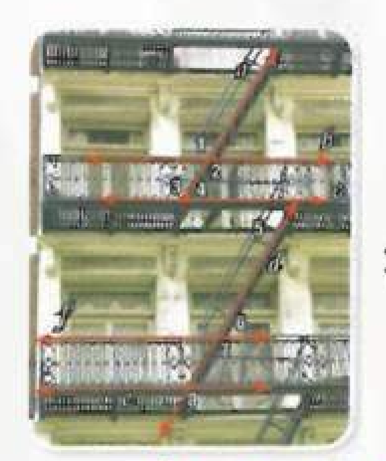
26) $\angle 6$ و $\angle 8$ متبادلتان خارجياً

27) $\angle 2$ و $\angle 3$ متحالفتان

28) $\angle 9$ و $\angle 10$ متبادلتان خارجياً

29) $\angle 4$ و $\angle 11$

متبادلتان خارجياً



سلَّم طوارئ: استعمل صورة سلَّم الطوارئ المجاورة؛ لتحدد القاطع الذي يصل بين كل زوج من الزوايا فيما يأتي، ثم صنِّف زوج الزوايا إلى زاويتين متبادلتين داخليًّا، أو متبادلتين خارجيًّا، أو متناظرتين:

31) $\angle 1$ و $\angle 3$ المستقيم a؛ متناظرتين

32) $\angle 2$ و $\angle 4$ المستقيم a؛ متحالفتين

33) $\angle 4$ و $\angle 5$ المستقيم c؛ متبادلتان داخلياً

34) $\angle 5$ و $\angle 6$ المستقيم d؛ متبادلتان داخلياً

الرجوع



35) $\angle 7$ و $\angle 8$

المستقيم d؛ متناظرتان.

36) $\angle 2$ و $\angle 3$

المستقيم a؛ متبادلتان داخلياً.

37) **كهرباء:** استعمل الصورة المجاورة في فقرة الربط مع الحياة والمعلومات أدناها للإجابة عما يأتي:

a) ماذا يجب أن تكون عليه العلاقة بين خطَّي التوصيل الكهربائي p و m؟ وضح إجابتك.

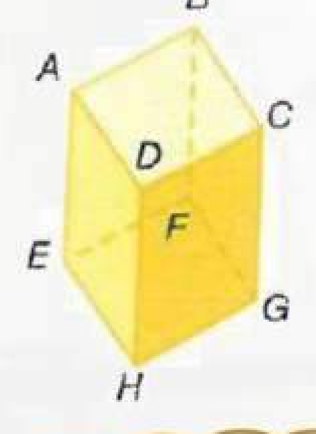
بما أن المستقيمين يقعان في المستوى نفسه وغير متلاقيين فإنهما متوازيان.



b) ما العلاقة بين ذراع الحمل q وخطَّي التوصيل الكهربائي p و m؟

الخط q يمثل قاطعاً لكل من p و m.

استعمل الشكل المجاور لتصف العلاقة بين كل زوج من القطع المستقيمة الآتية بكتابة: متوازيتان، أو متخالفتان، أو متقاطعتان:

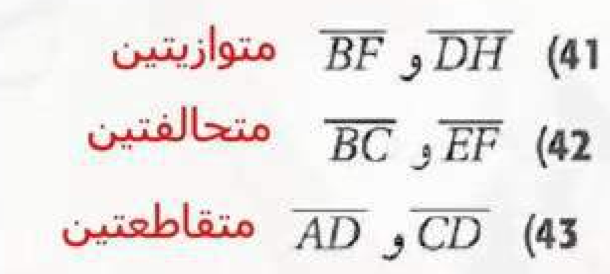




38) $\overline{FG}$ و $\overline{BC}$ متوازيتين

39) $\overline{AB}$ و $\overline{CG}$ متخالفتين

40) $\overline{DH}$ و $\overline{HG}$ متقاطعتين

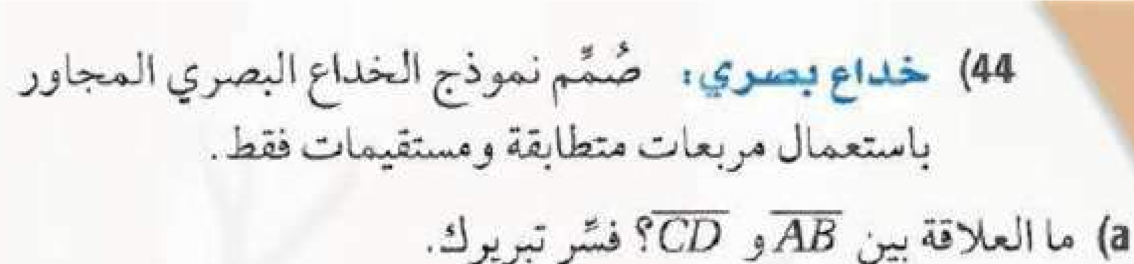


41) $\overline{DH}$ و $\overline{BF}$ متوازيتين

42) $\overline{EF}$ و $\overline{BC}$ متخالفتين

43) $\overline{CD}$ و $\overline{AD}$ متقاطعتين





44) **خداع بصري:** صَمِّم نموذج الخداع البصري المجاور باستعمال مربعات متطابقة ومستقيمات فقط.

a) ما العلاقة بين $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$؟ فسِّر تبريرك.

$\overline{AB}$ توازي $\overline{DC}$ ؛ المسافة بين القطعتين المستقيمتين هي نفسها من أي موقع على القطعة المستقيمة.

b) ما العلاقة بين $\overline{MN}$ و $\overline{QR}$؟ وما العلاقة بين القطعتين المستقيمتين $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ والقطعة المستقيمة $\overline{OP}$؟

$\overline{QR}$ توازي $\overline{OP}, \overline{MN}$ قاطع لكل من $\overline{AB}, \overline{CD}$

45) **سلّم كهربائي:** يتكون السلّم الكهربائي من درجات مثبتة على مسار متصل بمحرّك، حيث تُطوى درجات أعلى السلم وأسفله؛ ليتكون سطح مستوٍ عند الدخول والخروج كما في الشكل التالي.

a) ما العلاقة بين أسطح الدرجات الصاعدة؟ متوازية

b) ما العلاقة بين أسطح الدرجات الثلاث أعلى السلم؟

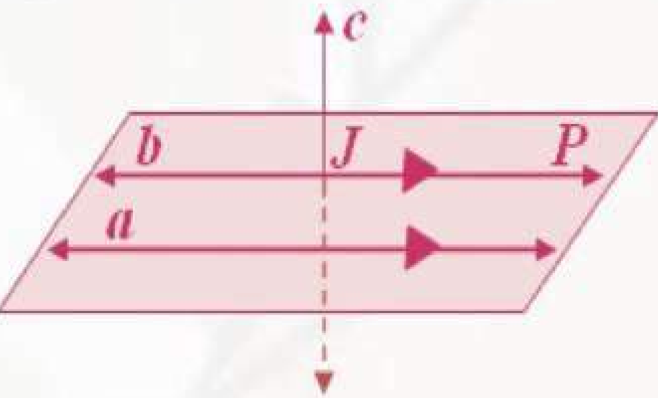
تقع على استقامة واحدة

c) ما العلاقة بين أسطح الدرجات الصاعدة وأسطح الدرجات الهابطة في مسار السلم؟

متخالفة

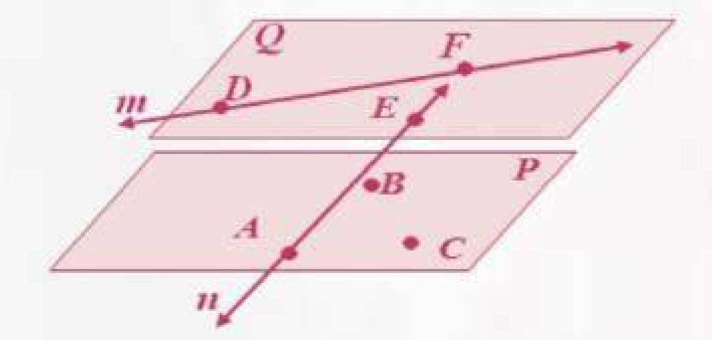


46) **مسألة مفتوحة:** يحوي المستوى $\mathcal{P}$ المستقيمين المتوازيين a, b. ويقطع المستقيم c المستوى $\mathcal{P}$ عند النقطة J. إذا كان المستقيمان a, c متخالفين، والمستقيمان b, c غير متخالفين، فارسم شكلًا يمثل هذا الوصف.



47) **تحدٍ:** افترض أن النقاط A, B, C تقع في المستوى $\mathcal{P}$، وأن النقاط D, E, F تقع في المستوى Q. وأن المستقيم m يحوي النقطتين D, F ولا يقطع المستوى $\mathcal{P}$. وأن المستقيم n يحوي النقطتين A, E.

a) ارسم شكلًا يمثل هذا الوصف.



b) ما العلاقة بين المستويين $\mathcal{P}$ و Q؟ متوازيان

c) ما العلاقة بين المستقيمين m و n؟ متخالفان



تبرير: المستويان $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ متوازيان، والمستوى $\mathcal{Z}$ يقطع المستوى $\mathcal{X}$. والمستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ يقع في المستوى $\mathcal{X}$، والمستقيم $\overleftrightarrow{CD}$ يقع في المستوى $\mathcal{Y}$، والمستقيم $\overleftrightarrow{EF}$ يقع في المستوى $\mathcal{Z}$. حدّد ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا. وضح إجابتك:

48) $\overleftrightarrow{AB}$ يخالف $\overleftrightarrow{CD}$.

صحيحة أحيانًا؛ إما أن يكون $\overleftrightarrow{AB}$ موازيًا لـ $\overleftrightarrow{CD}$ أو يخالفه؛ لأنهما لا يتقاطعان أبدًا ولا يقعان في المستوى نفسه.

49) $\overleftrightarrow{AB}$ يقطع $\overleftrightarrow{EF}$.

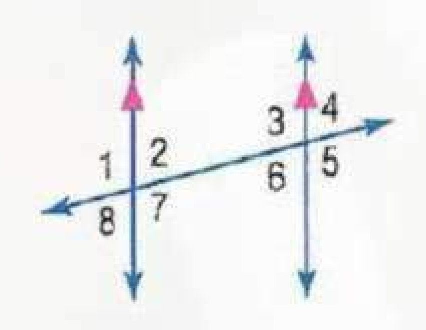
صحيحة أحيانًا؛ $\overleftrightarrow{AB}$ يقطع المستقيم $\overleftrightarrow{EF}$ اعتمادًا على تقاطع المستويين X, Z.

50) **اكتب:** وضّح لماذا لا يكون المستويان متخالفين أبدًا.

لا يكون المستويان متخالفين؛ لأن تعريف المستقيمين المتخالفين ينصُّ على أن المستقيمين لا يتقاطعان ولا يقعان في المستوى نفسه.
والمستويان المتخالفان لا يقعان في المستوى نفسه، ولكنهما يكونان متوازيين أو متقاطعين.



في الشكل المجاور: $m\angle 1 = 94°$. أوجد قياس كلٍّ من الزوايا الآتية، واذكر المسلمات أو النظريات التي استعملتها:



1) $\angle 3$ $\angle 1 = \angle 3 = 94°$ مسلَّمة الزاويتين المتناظرتين.

2) $\angle 5$ $\angle 1 = \angle 5 = 94°$ نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجياً

3) $\angle 4$ $\angle 5$ و $\angle 4$ زاويتين متجاورتين على استقامة واحدة

$180 - 94 = 86° = \angle 4$

مسلَّمة الزاويتين المتناظرتين، ونظرية الزاويتين المتكاملتين.





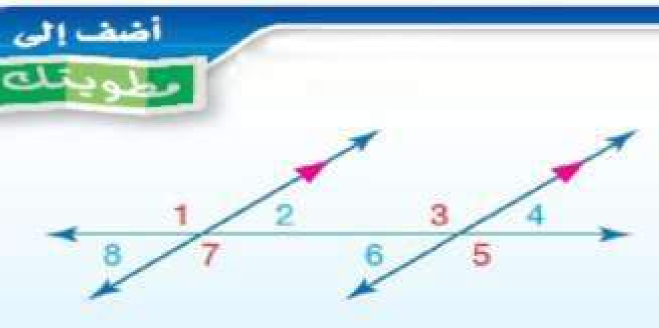


مسلمة 2.1 مسلّمة الزاويتين المتناظرتين

أضف إلى مطويتك

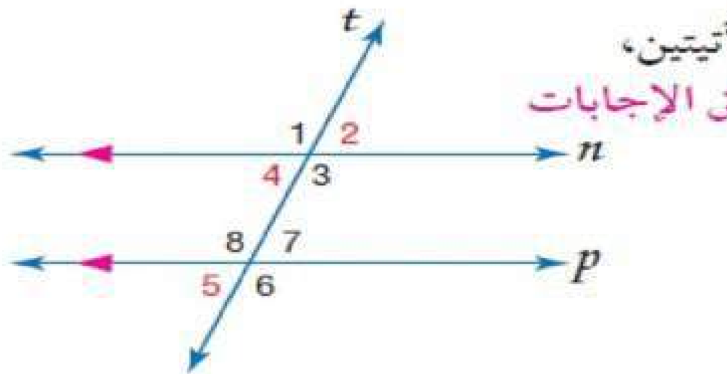
إذا قطع قاطع مستقيمين متوازيين، فإن كل زاويتين متناظرتين متطابقتان.

أمثلة: $\angle 1 \cong \angle 3, \angle 2 \cong \angle 4, \angle 5 \cong \angle 7, \angle 6 \cong \angle 8$



مثال 1 استعمال مسلّمة الزاويتين المتناظرتين

في الشكل المجاور: $m\angle 5 = 72^\circ$. أوجد قياس كل من الزاويتين الآتيتين، واذكر المسلمات أو النظريات التي استعملتها. (1A–1C) انظر ملحق الإجابات



a) $\angle 4$

$\angle 4 \cong \angle 5$	مسلّمة الزاويتين المتناظرتين
$m\angle 4 = m\angle 5$	تعريف تطابق الزوايا
$m\angle 4 = 72^\circ$	بالتعويض

b) $\angle 2$

$\angle 2 \cong \angle 4$	نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس
$\angle 4 \cong \angle 5$	مسلّمة الزاويتين المتناظرتين
$\angle 2 \cong \angle 5$	خاصية التعدي للتطابق
$m\angle 2 = m\angle 5$	تعريف تطابق الزوايا
$m\angle 2 = 72^\circ$	بالتعويض





في الشكل أعلاه، إذا كان $m\angle 8 = 105°$. فأوجد قياس كل من الزوايا الآتية. واذكر المسلمات أو النظريات التي استعملتها.

1A) $\angle 1$

1A) $105°$؛ مسلّمة الزاويتين المتناظرتين.

1B) $\angle 2$

1B) $75°$؛ $\angle 2$ تكمّل $\angle 1$؛ نظرية الزاويتين المتكاملتين.

1C) $\angle 3$



1C) $105°$؛ نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس.

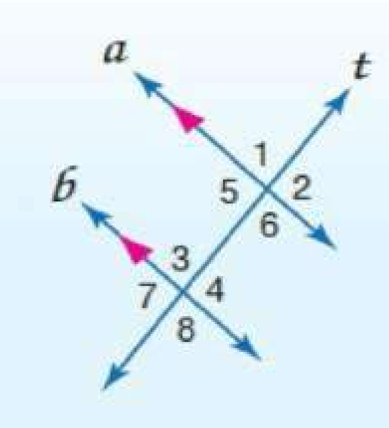


برهان **نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًا**

المعطيات: $a \parallel b$

t قاطع للمستقيمين b ، a.

المطلوب: $\angle 4 \cong \angle 5$ ، $\angle 3 \cong \angle 6$



برهان حر:

لدينا من المعطيات $a \parallel b$ ، والمستقيم t قاطع لهما. ومن مسلّمة الزاويتين المتناظرتين $\angle 4 \cong \angle 2$ و $\angle 8 \cong \angle 6$. وكذلك $\angle 2 \cong \angle 5$ و $\angle 3 \cong \angle 8$ ؛ لأن الزاويتين المتقابلتين بالرأس متطابقتان؛ لذا فإن $\angle 5 \cong \angle 4$ و $\angle 3 \cong \angle 6$ بحسب خاصية التعدي للتطابق.

مثال 2 من واقع الحياة **استعمال نظريات المستقيمين المتوازيين وأزواج الزوايا**

تخطيط المدن: شارع الروضة وشارع النسيم متوازيان ويقطعهما شارع الحديقة.

فإذا كان $m\angle 1 = 118°$، فأوجد $m\angle 2$.

$\angle 2 \cong \angle 1$	نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًا
$m\angle 2 = m\angle 1$	تعريف تطابق الزوايا
$m\angle 2 = 118°$	بالتعويض





تخطيط المدن: استعن بالشكل أعلاه للإجابة عن السؤالين الآتيين، واذكر المسلمات أو النظريات التي استعملتها :

2A) إذا كان $m\angle 1 = 100^\circ$، فأوجد $m\angle 4$.

2A) 80° ؛ نظرية تكامل الزوايا

2B) إذا كان $m\angle 3 = 70^\circ$، فأوجد $m\angle 4$.

2B) 70° ؛ نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجيًّا



مثال 3 إيجاد قيم المتغيرات

جبر: استعمل الشكل المجاور لإيجاد المتغير في كل مما يأتي. وضّح تبريرك.

a) إذا كان $m\angle 1 = 85°$, $m\angle 4 = (2x - 17)°$، فأوجد قيمة x.

$\angle 3 \cong \angle 1$	نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس
$m\angle 3 = m\angle 1$	تعريف تطابق الزوايا
$m\angle 3 = 85°$	بالتعويض

بما أن المستقيمين r, s متوازيان، فإن الزاويتين $\angle 3$, $\angle 4$ متكاملتان بحسب نظرية الزاويتين المتحالفتين.

$m\angle 3 + m\angle 4 = 180$	تعريف الزاويتين المتكاملتين
$85 + 2x - 17 = 180$	بالتعويض
$2x + 68 = 180$	بالتبسيط
$2x = 112$	بطرح 68 من كلا الطرفين
$x = 56$	بقسمة كلا الطرفين على 2

إرشادات للدراسة

تطبيق المسلّمات والنظريات

طبّق مسلّمات ونظريات هذا الدرس فقط على المستقيمات المتوازية التي يقطعها قاطع؛ لذا لا تفترض توازي مستقيمين إلا إذا ورد ذلك في النص، أو وُجدت أسهمٌ على المستقيمات تشير إلى توازيها.





إرشادات للدراسة

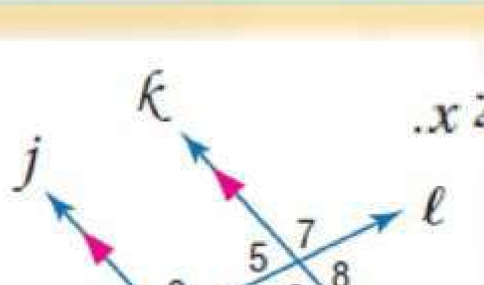
تطبيق المسلَّمات والنظريات
طبِّق مسلَّمات ونظريات هذا الدرس فقط على المستقيمات المتوازية التي يقطعها قاطع؛ لذا لا تفترض توازي مستقيمين إلا إذا ورد ذلك في النص، أو وُجِدت أسهمٌ على المستقيمات تشير إلى توازيها.

b) إذا كان $m\angle 7 = (7y + 6)^\circ$, $m\angle 3 = (4y + 30)^\circ$، فأوجد قيمة y .

$\angle 3 \cong \angle 7$	نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًا
$m\angle 3 = m\angle 7$	تعريف تطابق الزوايا
$4y + 30 = 7y + 6$	بالتعويض
$30 = 3y + 6$	بطرح $4y$ من كلا الطرفين
$24 = 3y$	بطرح 6 من كلا الطرفين
$8 = y$	بقسمة كلا الطرفين على 3







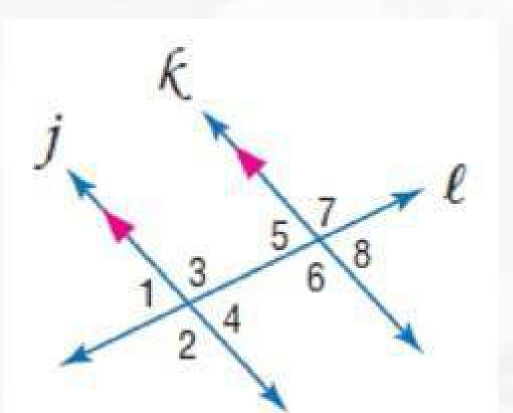
3A) إذا كان $m\angle 7 = (5x - 13)^\circ$, $m\angle 2 = (4x + 7)^\circ$، فأوجد قيمة x.

3A) بما أن المستقيمين j و k متوازيان، إذن $\angle 2$ و $\angle 7$ متطابقتان بحسب نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجيًّا.

$m\angle 2 = m\angle 7$	تعريف التطابق
$4x + 7 = 5x - 13$	بالتعويض
$4x + 20 = 5x$	بإضافة 13 لكلا الطرفين
$20 = x$	بطرح $4x$ من كلا الطرفين



(3B إذا كان $m\angle 3 = (3y - 2)^\circ$, $m\angle 5 = 68^\circ$، فأوجد قيمة y.



(3B بما أن المستقيمين j و k متوازيان، إذن $\angle 3$ و $\angle 5$ متكاملتان بحسب نظرية الزاويتين المتحالفتين.

$m\angle 5 + m\angle 3 = 180^\circ$ تعريف الزاويتين المتكاملتين

$68 + 3y - 2 = 180^\circ$ بالتعويض

$3y + 66 = 180$ بالتبسيط

$3y = 114$ بطرح 66 من الطرفين

$y = 38$ بقسمة الطرفين على 3





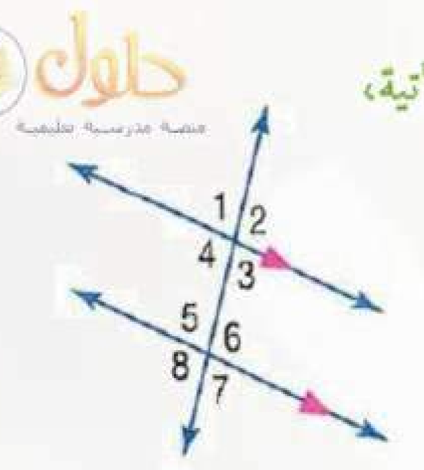
٢-٢ الزوايا والمستقيمات المتوازية
Angeles And Parallel Lines



قراءة الرياضيات

العمودي تذكّر أن الرمز $t \perp b$ يقرأ على النحو الآتي : المستقيم b عمودي على المستقيم t.





في الشكل المجاور: $m\angle 4 = 101^\circ$. أوجد قياس كلٍّ من الزوايا الآتية، واذكر المسلمات أو النظريات التي استعملتها:

4) $\angle 6$ $\angle 4 = \angle 6 =$ بالتبادل ؛ نظرية الزاويتين المتبادلتين داخلياً.

5) $\angle 7$ $\angle 4$ و $\angle 5$ متحالفتان إذن مجموعهم = ١٨٠

إذن $\angle 5 = 79$

و $\angle 5$ تساوي $\angle 7$ بالتقابل بالرأس .

$\angle 7 = 79$

نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس، ونظرية الزاويتين المتحالفتين.

6) $\angle 5$ $\angle 4$ و $\angle 5$ متحالفتان إذن مجموعهم = ١٨٠

إذن $\angle 5 = 79$

$\angle 5 = 79$ ؛ نظرية الزاويتين المتحالفتين.



7) **طرق:** حاجز الحماية في الشكل المجاور يوازي سطح الطريق، والدعامات الرأسية يوازي بعضها بعضًا. أوجد قياسات الزوايا 2, 3, 4 .





$m\angle 2 = 93$ بالتبادل داخلياً

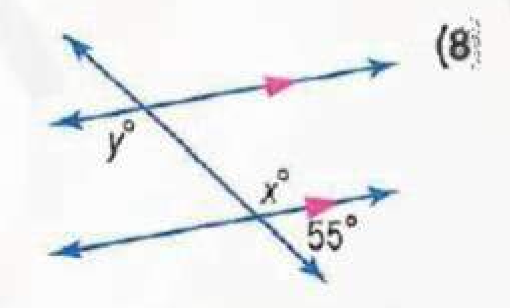
بما أن مكملة $\angle 3$ تساوي $\angle 2$ بالتناظر

إذن $\angle 3 = 87$

$\angle 4$ تساوي مكملة ٩٣ بالتناظر

$\angle 4 = 87$

أوجد قيمة كل متغير في الأشكال الآتية. برّر إجابتك:



نظرية الزاويتين المتكاملتين $x = 125$

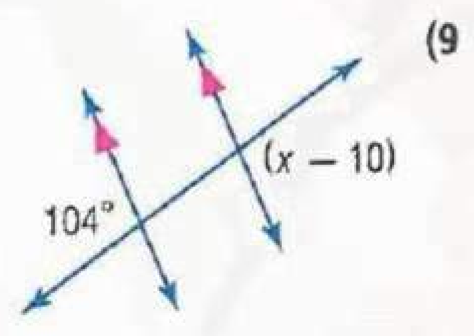
$x + 55 = 180$

$x = 180 - 55$

$x = 125$

$y = x = 125$

، نظرية الزاويتين المتبادلتين داخلياً



نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجياً

$x - 10 = 104$

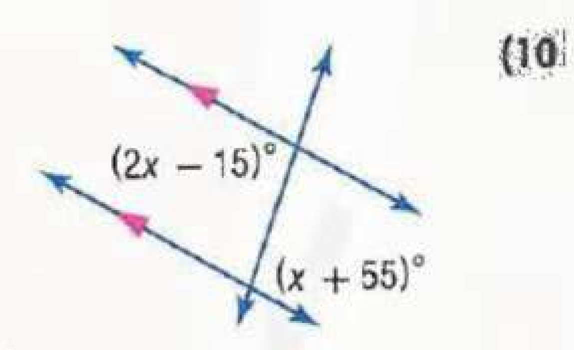
$x = 104 + 10$

$x = 114$ ْ





10)



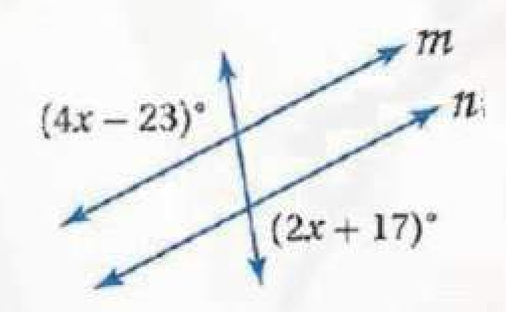
نظرية الزاويتين المتبادلتين داخلياً

$2x - 15 = x + 55$

$2x - x = 55 + 15$

$x = 70°$

11) **إجابة قصيرة:** إذا كان $m \parallel n$، فأوجد قيمة x.
بيِّن خطوات حلك.



$4x - 23 = 2x + 17$

$4x - 2x = 17 + 23$

$2x = 40$

$x = 20$

في الشكل المجاور: $m\angle 11 = 22°$، و $m\angle 14 = 18°$، أوجد قياس كلٍّ من الزوايا الآتية، واذكر المسلمات أو النظريات التي استعملتها:

12) $\angle 4$

$\angle 4 = \angle 11 = 22°$ بالتناظر ؛ مسلَّمة الزاويتين المتناظرتين.

13) $\angle 3$

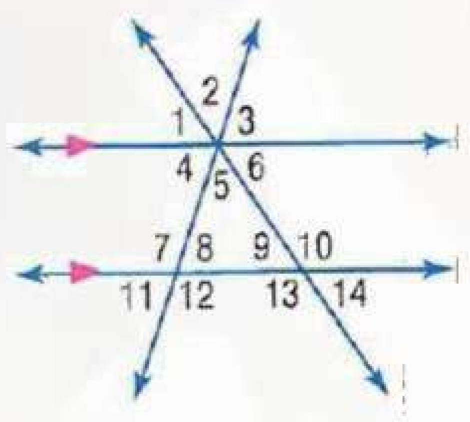
$\angle 3 = \angle 4 = 22°$ بالتقابل بالرأس



14) $\angle 2$

نظرية زاويتان متبادلتان خارجياً ونظرية الزاويتين المتكاملتين

$\angle 1 = \angle 14$ ، $\angle 3 = \angle 11$ بالتبادل خارجياً



$$180 = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3$$

زوايا متجاورة على استقامة واحدة

$$180 = 18 + \angle 2 + 22$$

$$180 - 40 = \angle 2$$

$$140^\circ = \angle 2$$

15) $\angle 10$

$$180 = \angle 14 + \angle 10$$

$$180 = 18 + \angle 10$$

$$162^\circ = \angle 10$$

نظرية الزاويتين المتكاملتين.

16) $\angle 5$

$18^\circ = \angle 14 = \angle 1$ نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجياً

17) $\angle 1$

$140^\circ = \angle 2 = \angle 5$ نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس.





طاقة شمسية: يجمع الطبق الشمسي الطاقة بتوجيه أشعة الشمس نحو مُستقبِل يقع في بؤرة الطبق. مفترضًا أن أشعة الشمس متوازية، حدّد العلاقة بين أزواج الزوايا الآتية. برّر إجابتك:



18) $\angle 1$ و $\angle 2$ متكاملان؛ لأنهما زاويتان متحالفتان.

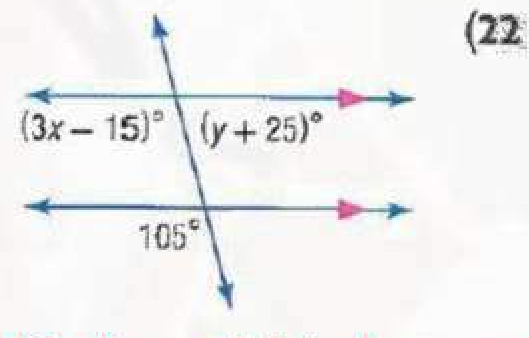
19) $\angle 1$ و $\angle 3$ متطابقان؛ لأنهما زاويتان متناظرتان

20) $\angle 4$ و $\angle 5$ متطابقتان؛ لأنهما زاويتان متبادلتان خارجياً

21) $\angle 3$ و $\angle 4$ متكاملتان؛ بما أن $\angle 3$ و $\angle 5$ متجاورتان على مستقيم فإنهما متكاملتان. $\angle 4$ و $\angle 5$ متطابقتان لأنهما زاويتان متبادلتان خارجياً، لذا فإن $\angle 3$ تكمل $\angle 4$.

أوجد قيمة كل متغيّر في الأشكال الآتية. برّر إجابتك:

22)



حسب مسلّمة الزاويتين المتناظرتين:

$$3x - 15 = 105$$
$$3x = 105 + 15 = 120$$
$$x = 120 \div 3$$
$$x = 40$$

حسب نظرية الزاويتين المتكاملتين:

$$3x - 15 + y + 25 = 180$$
$$3 \times 40 - 15 + y + 25 = 180$$
$$y + 130 = 180$$
$$y = 50^{\circ}$$



(23

حسب نظرية الزاويتين المتجاورين على مستقيم

$$180 - 54 = 126$$

$$126 = 2x$$

حسب نظرية الزاويتين المتبادلتين داخلياً

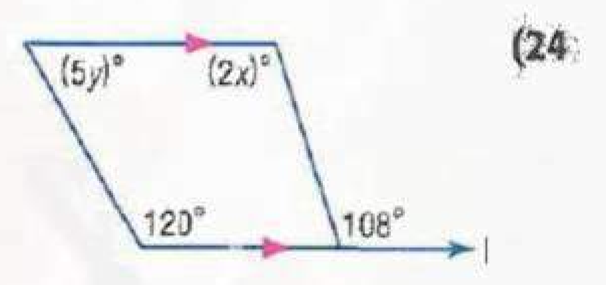
$$x = 126 - 2 = 63$$

$$x = 63^\circ$$

(24



حسب نظرية الزاويتين المتبادلتين داخلياً:



$$2x = 108$$

$$x = 108 \div 2$$

$$x = 54^\circ$$

y = 12حسب نظرية الزاويتين المتحالفتين:

$$5y + 120 = 180$$

$$5y = 60$$

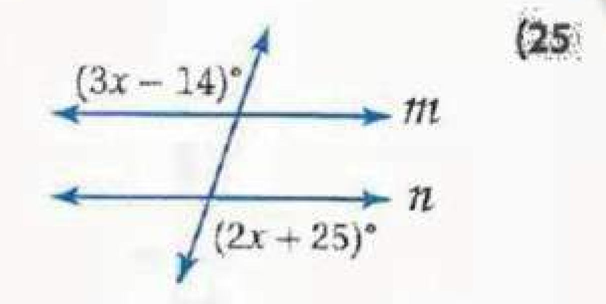
$$y = 60 \div 5$$

$$y = 12$$



إذا كان $n \parallel m$ ، فأوجد قيمة x في كلٍّ مما يأتي، وحدّد المسلّمة أو النظرية التي استعملتها:

(25



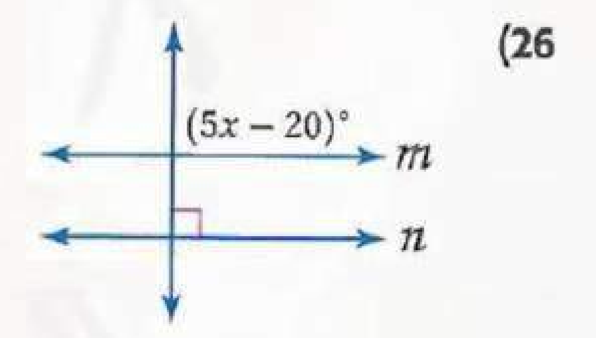
حسب نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجياً

$3x - 14 = 2x + 25$

$3x - 2x = 25 + 14$

$x = 39$

(26



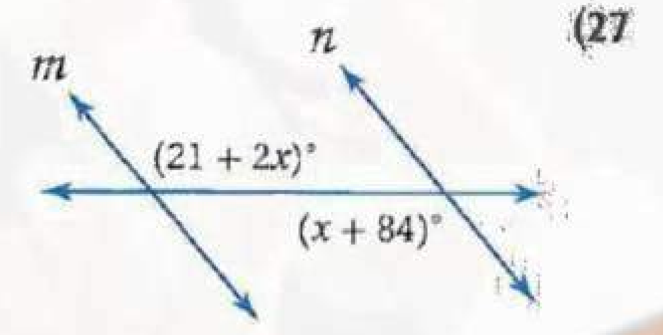
حسب نظرية الزاويتين المتناظرتين

$5x - 20 = 90$

$5x = 110$

$x = 22$

(27



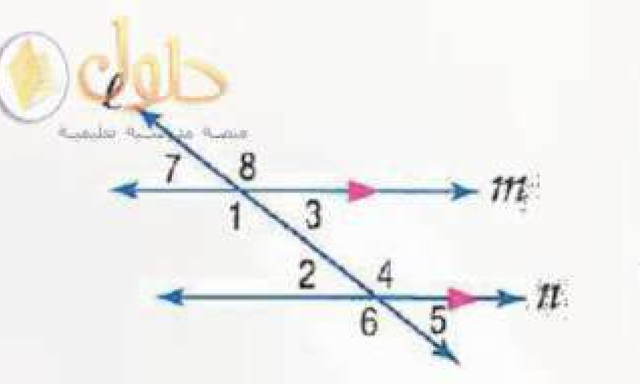
حسب نظرية الزاويتين المتبادلتين داخلياً

$21 + 2x = x + 48$

$2x - x = 48 - 21$

$x = 27$





28) **برهان:** أكمل برهان النظرية 2.2 .

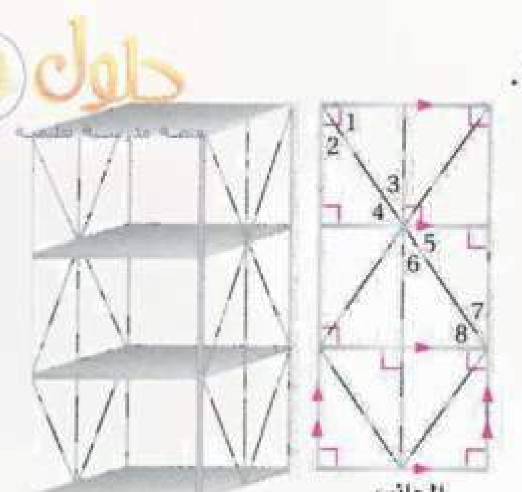
المعطيات: $m \parallel n$ ، ℓ قاطع للمستقيمين m, n.

المطلوب: $\angle 2$, $\angle 1$ متكاملتان، $\angle 4$,$\angle 3$ متكاملتان.

البرهان:

العبارات	المبررات
a) ؟ $m \parallel n$ ، ℓ قاطع للمستقيمين m, n.	a) مُعطى
b) $\angle 3$,$\angle 1$ متجاورتان على مستقيم $\angle 4$,$\angle 2$ متجاورتان على مستقيم	b) ؟ تعريف الزاويتين المتجاورتين
c) ؟ $\angle 1$ و $\angle 3$ متكاملتان. $\angle 2$ و $\angle 4$ متكاملتان.	c) نظرية الزاويتين المتكاملتين.
d) $\angle 1 \cong \angle 4$, $\angle 2 \cong \angle 3$	d) ؟ نظرية الزاويتين المتبادلتين داخلياً
e) $m\angle 1 = m\angle 4$, $m\angle 2 = m\angle 3$	e) تعريف تطابق الزوايا.
f) ؟ $\angle 1$ و $\angle 2$ متكاملتان. $\angle 3$ و $\angle 4$ متكاملتان.	f) ؟ بالتعويض





تخزين: عند تركيب الرفوف، تُضاف دعامات جانبية متقاطعة.
حدّد العلاقة بين كل زوج من الزوايا فيما يأتي. برّر إجابتك:

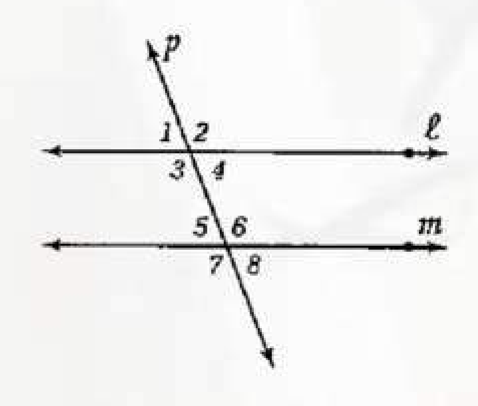
29) $\angle 1$ و $\angle 8$ متطابقتان؛ زاويتان متبادلتان داخلياً

30) $\angle 1$ و $\angle 5$ متطابقتان؛ زاويتان متناظرتان

31) $\angle 3$ و $\angle 6$ متطابقتان؛ زاويتان متقابلتان بالرأس

32) $\angle 1$ و $\angle 2$ متتامتان؛ لان المستقيمين الرأسي والافقي متعامدان ويشكلان زوايا قائمة.

33) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين لنظرية الزاويتين المتبادلتين خارجيًا. (نظرية 2.3).



المعطيات: $L \parallel m$

المطلوب: $\angle 2 \cong \angle 7$، $\angle 1 \cong \angle 8$

البرهان:

١) $L \parallel m$ (مُعطى)

٢) $\angle 6 \cong \angle 2$، $\angle 5 \cong \angle 1$ (مسلّمة الزاويتين المتناظرتين)

٣) $\angle 7 \cong \angle 6$، $\angle 8 \cong \angle 5$ (نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس)

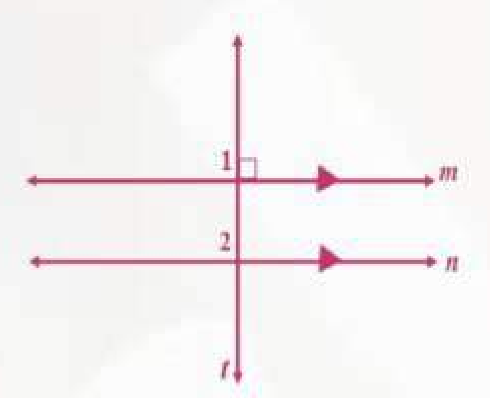
٤) $\angle 7 \cong \angle 2$، $\angle 8 \cong \angle 1$ (خاصية التعدي)



34) برهان: أثبت أنه إذا كان مستقيم عموديًا على أحد مستقيمين متوازيين في مستوًى، فإنه يكون عموديًا على الآخر. (نظرية 2.4).

المعطيات: $m \parallel n$ ،$t\ m$

المطلوب: $t\ n$



البرهان:

١) $m \parallel n$ ،m t (معطيات)

٢) $\angle 1$ قائمة (تعريف التعامد)

٣) (تعريف الزاوية القائمة)

٤) $\angle 2 \cong \angle 1$ (مسلّمة الزاويتين المتناظرتين)

5) $m\angle 1 = m\angle 2$ (تعريف تطابق الزوايا)

6) $m\angle 2 = 90o$ (بالتعويض)

7) $\angle 2$ زاوية قائمة (تعريف الزاوية القائمة)

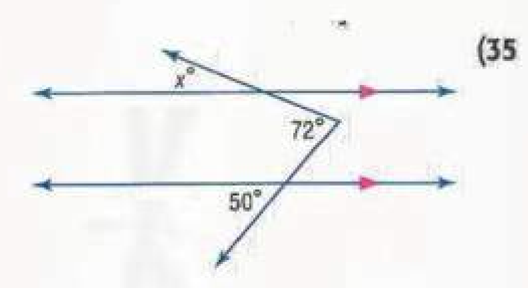
8) $t\ n$ (تعريف المستيقيمين المتعامدين).

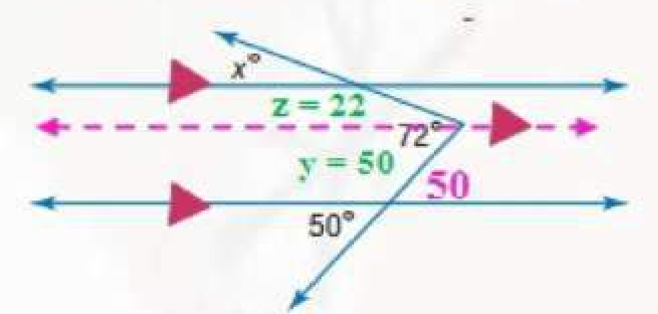




أوجد قيمة x في كلٍّ من الشكلين الآتيين: (إرشاد: ارسم مستقيمًا مساعدًا)

(35





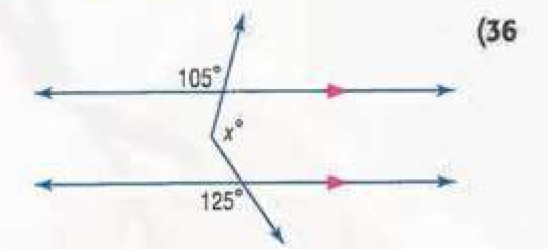
الزاوية 50^o تساوي المقابلة لها حسب نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس
رسم مستقيم يوازي كل من المستقيم الأخرين

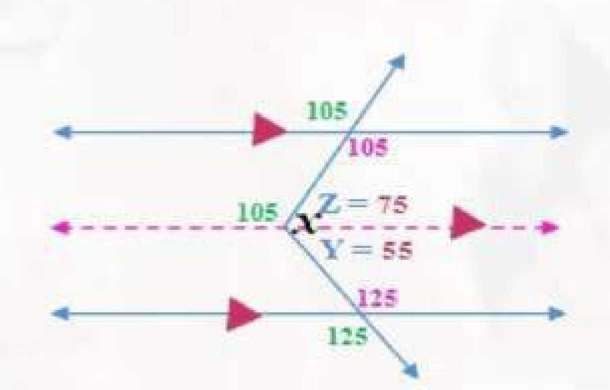
$50^\circ = Y$ حسب نظرية الزاويتان المتناظرتان.

$22^\circ = 72 - 50 = Z$

$22^\circ = X = Z$ حسب نظرية الزاويتان المتناظرتان.

(36







الزاوية 125° تساوي المقابلة لها وكذلك زاوية 105° حسب نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس.

رسم مستقيم يوازي كل من المستقيم الأخرين.

باستخدام نظرية الزاويتين المتبادلتين داخلياً والزاويتين المتجاورتين على مستقيم.

$55^\circ = 180 - 125 = Y$ حسب نظرية الزاويتان المتناظرتان والزاويتان المتجاورتان.

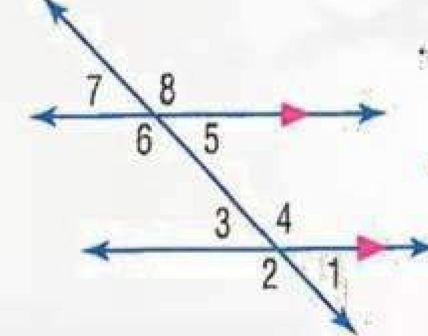
$75^\circ = 180 - 105 = Z$ حسب نظرية الزاويتان المتجاورتان.

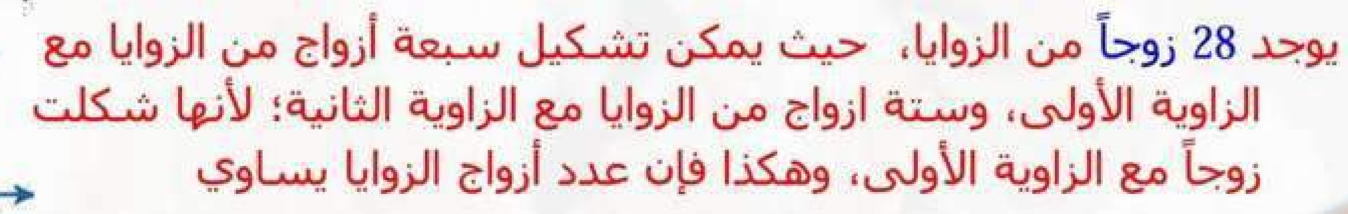
$Z + Y = X$ حسب نظرية الزاويتان المتناظرتان.

$130^\circ = 75 + 55 = X$

37) **احتمالات:** افترض أنك اخترت عشوائيًّا زوجًا من الزوايا في الشكل المجاور.

a) ما عدد الطرق الممكنة لاختيار زوج الزوايا؟ برّر إجابتك.




يوجد 28 زوجاً من الزوايا، حيث يمكن تشكيل سبعة أزواج من الزوايا مع الزاوية الأولى، وستة ازواج من الزوايا مع الزاوية الثانية؛ لأنها شكلت زوجاً مع الزاوية الأولى، وهكذا فإن عدد أزواج الزوايا يساوي

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$ أو 28 زوجاً.



b) صِف العلاقات الممكنة بين زاويتي كل زوج. برّر إجابتك.

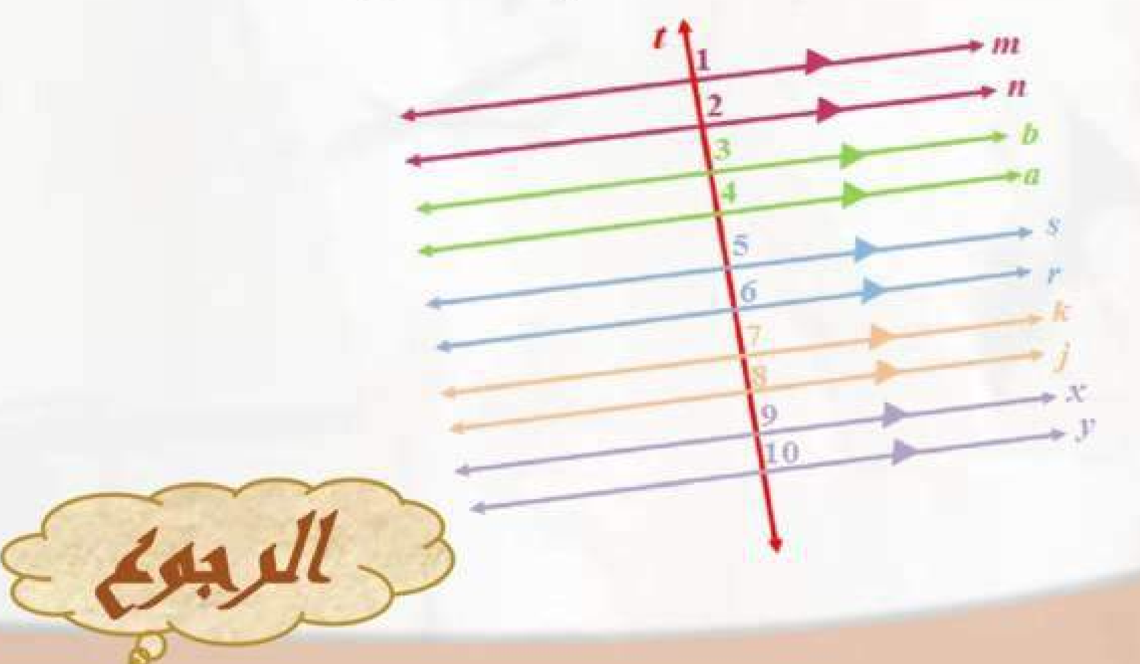
توجد علاقتان ممكنتان بين أزواج الزوايا، فإذا اخترنا زاويتين فإنهما إما متطابقتان أو متكاملتان.

c) أوجد احتمال اختيار زوج من الزوايا المتطابقة. برّر إجابتك.

نصف أزواج الزوايا متطابقة، والنصف الآخر لأزواج الزوايا متكاملة، لذا فإن احتمال إختبار زوج متطابق من الزوايا تكون نسبة 1 إلى 2 أو 50%.

38) **تمثيلات متعددة:** ستبحث في هذه المسألة العلاقة بين الزوايا الخارجية الواقعة في الجهة نفسها.

a) **هندسيًا:** ارسم خمسة أزواج من المستقيمات المتوازية m و n ، a و b ، r و s ، j و k ، x و y يقطع كلًّا منها قاطع t، ثم قِسْ جميع الزوايا الناتجة. (يمكنك استخدام الآلة البيانية في هذا التمرين)



a) هندسياً: المستقيمين m و n:

الرجوع

b) **جدوليًا:** دوِّن بياناتك في جدول.

$m\angle 1$	$m\angle 2$	$m\angle 3$	$m\angle 4$
60	120	60	120
45	135	45	135
70	110	70	110
90	90	90	90
25	155	25	155
30	150	30	150

c) **لفظيًا:** ضع تخمينًا حول العلاقة بين الزاويتين الخارجيتين الواقعتين في جهة واحدة من القاطع.

الزاويتان الخارجيتان الواقعتان في جهة واحدة من القاطع متكاملتان.

d) **منطقيًا:** ما نوع التبرير الذي استعملته لوضع تخمينك؟ برّر إجابتك .

التبرير الاستقرائي؛ ثم استعمال نمط للوصول إلى النتيجة.

e) **برهان:** برهن تخمينك.





البرهان:

١) المستقيمان m و n متوازيان ويقطعهما المستقيم t. (مُعطى)

٢) $m\angle 1 + m\angle 2 = 180^\circ$ (نظرية الزاويتين المتكاملتين)

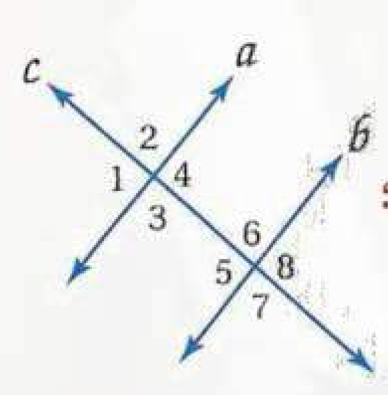
٣) $\angle 2$, $\angle 4$ (الزاويتان المتناظرتان متطابقتان)

٤) $m\angle 2 = m\angle 4$ (تعريف التطابق)

٥) $m\angle 1 + m\angle 4 = 180^\circ$ (بالتعويض)

٦) $\angle 1$ و $\angle 4$ متكاملتان (تعريف الزاويتين المتكاملتين)

(39) اكتب: إذا كان المستقيم a يوازي المستقيم b، و $\angle 2 \cong \angle 1$.
فصِف العلاقة بين المستقيمين b و c. وبرّر إجابتك.



المستقيمان b و c متعامدان؛ بما أن $\angle 1$ و $\angle 2$ متجاورتان على مستقيم؛ فإن:

$m\angle 1 + m\angle 2 = 180^\circ$، لكن $\angle 1$ $\angle 2$، لذا $m\angle 1 = m\angle 2$،

بالتعويض $m\angle 1 + m\angle 1 = 180^\circ$، لذا $m\angle 1 = 90^\circ$ و $m\angle 2 = 90^\circ$.

لذا فالمستقيمان a و c متعامدان. حسب النظرية 2.4،

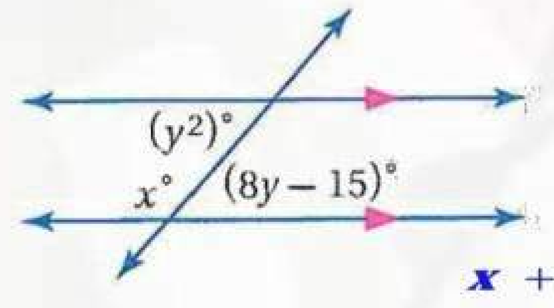
وبما ان c عمودي على المستقيم a والمستقيمين a و b متوازيان،

فإن المستقيم c عمودي على المستقيم b أيضاً.



40) اكتب: حدد أوجه الشبه والاختلاف بين نظرية الزاويتين المتبادلتين داخلياً، ونظرية الزاويتين المتحالفتين.

يتكون في كلتا النظريتين زوج من الزوايا، عندما يقطع قاطع مستقيمين متوازيين. ومع ذلك ففي نظرية الزاويتين المتبادلتين داخلياً، يكون كل زوج من الزوايا المتبادلة داخلياً متطابقاً. في حين يكون كل زوج من الزوايا المتحالفاً متكاملاً في نظرية الزاويتين المتحالفتين.



41) تحد: أوجد جميع قيم x, y في الشكل المجاور.

(نظرية الزاويتان المتجاورتان متكاملتان)

عندما $y = ٣$

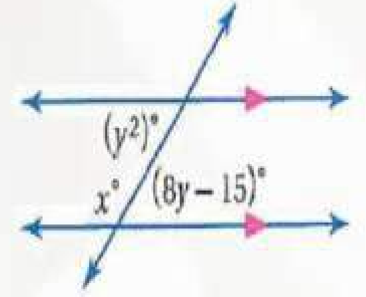
$$x + (8 \times 3) - 15 = 180$$
$$x + 24 - 15 = 180$$
$$x + 9 = 180$$
$$x = 171$$

عندما $y = ٥$

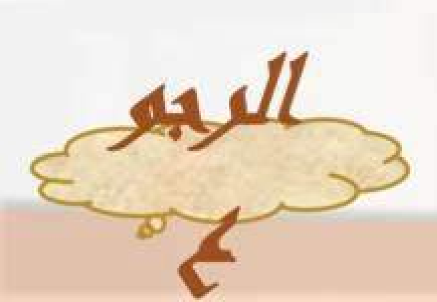
$$x + (8 \times 5) - 15 = 180$$
$$x + 40 - 15 = 180$$
$$x + 25 = 180$$
$$x = 155$$



42) **تبرير:** ما أقل عدد من قياسات الزوايا التي يجب معرفتها حتى يكون بمقدورك تحديد قياسات جميع الزوايا الناتجة عن مستقيمين متوازيين يقطعهما قاطع؟ وضّح إجابتك.



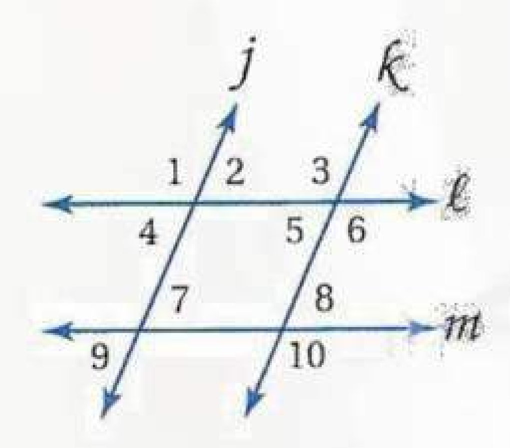
يكفي معرفة قياس زاوية واحدة؛ لأن الزوايا الباقية إما مطابقة لها أو مكملة.





٢-٣ إثبات توازي مستقيمين

هل يمكن إثبات أن أيًّا من مستقيمات الشكل متوازية، اعتمادًا على المعطيات في كل مما يأتي؟ وإذا كان أيها متوازيًا ، فاذكر المسلمة أو النظرية التي تبرّر إجابتك.





1) $\angle 1 \cong \angle 3$ $j \parallel k$؛ عكس مسلمة الزاويتين المتناظرتين.



2) $\angle 2 \cong \angle 5$ $j \parallel k$؛ عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين داخلياً.

3) $\angle 3 \cong \angle 10$ $\ell \parallel m$؛ عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجياً.

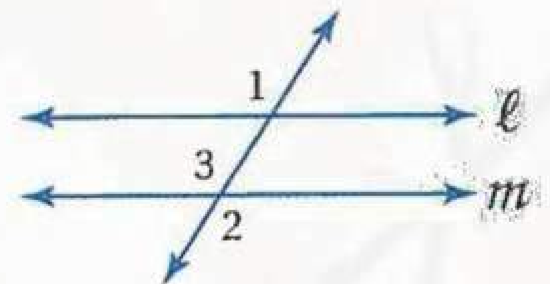
4) $m\angle 6 + m\angle 8 = 180^\circ$

$\ell \parallel m$؛ عكس نظرية الزاويتين المتحالفتين.





5) **برهان:** أكمل برهان النظرية 2.5 .



المعطيات: $\angle 1 \cong \angle 2$

المطلوب: $\ell \parallel m$

البرهان:

المبررات	العبارات
a) مُعطى	a) $\angle 1 \cong \angle 2$
b) ؟ ___ الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان	b) $\angle 2 \cong \angle 3$
c) خاصية التعدي للتطابق	c) $\angle 1 \cong \angle 3$
d) ؟ ___ إذا كانت الزوايا المتناظرة متطابقة فإن المستقيمين متوازيان	d) $\ell \parallel m$

6) **كراسي:** هل يمكن إثبات أن مسند الظهر ومسند القدمين لكرسي الاسترخاء في الشكل المجاور متوازيان؟ وضح ذلك إذا كان صحيحًا، وإلا فاذكر السبب.

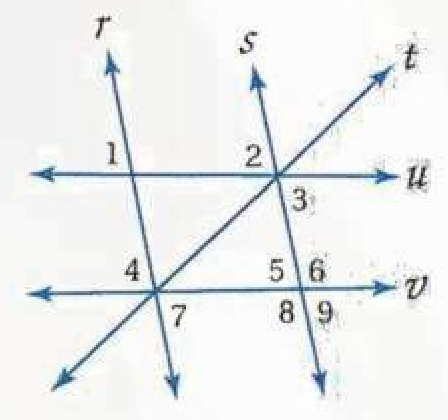
135°

135°

نعم؛ بما أن الزاويتين المتبادلتين داخلياً متطابقتان فإن مسندي الظهر والقدمين متوازيان.

الرجوع

هل يمكن إثبات أن أيًا من مستقيمات الشكل متوازية، اعتمادًا على المعطيات في كلٍّ مما يأتي؟ وإذا كان أيّها متوازيًا ، فاذكر المسلمة أو النظرية التي تبرّر إجابتك.



7) $\angle 1 \cong \angle 2$

زاويتان متناظرتان للمستقيم $\overleftrightarrow{rs}$ ؛ و $\angle 2 \cong \angle 1$ إذن $r \square s$ عكس مسلمة الزاويتين المتناظرتين.

8) $\angle 2 \cong \angle 9$

زاويتان متبادلتان خارجياً للمستقيم و $u \parallel v$ ؛ عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجياً.

9) $m\angle 7 + m\angle 8 = 180^\circ$ $r \parallel s$؛ عكس نظرية الزاويتين المتحالفتين.

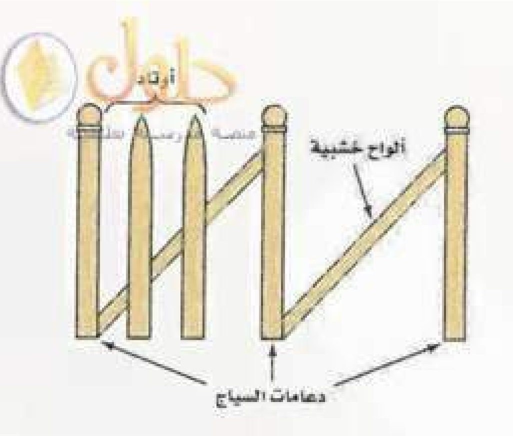
10) $m\angle 3 + m\angle 6 = 180^\circ$ $u \parallel v$؛ عكس نظرية الزاويتين المتحالفتين.

11) $\angle 3 \cong \angle 7$ لا توجد مستقيمات متوازية.

12) $\angle 4 \cong \angle 5$ $r \parallel s$؛ عكس مسلمة الزاويتين المتناظرتين.



13) **حدائق:** لبناء سياج حول حديقة المنزل، ثبّت سعود دعامات السياج، ووضع ألواحًا خشبية تميل بزاوية مع كلٍّ من دعامَتَي السياج. وعند تثبيته أوتاد السياج، حرص على أن تكون الزوايا بين الألواح الخشبية والأوتاد متساوية القياس. لماذا يجعل هذا الأوتاد متوازية؟



عندما يقيس سعود الزاوية التي يصنعها كل وتر في السياج مع لوح الخشب، فإنه يقيس زوايا متناظرة، وعندما تكون جميع الزوايا المتناظرة متطابقة، فإن الأوتاد يجب أن تكون متوازية.

14) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين للنظرية 2.6 .

العبارات (المبررات)

1) $\angle 1$ و $\angle 2$ متحالفتان (مُعطى).

2) $\angle 2$ و $\angle 3$ متجاورتان على مستقيم (تعريف الزاويتين المتجاورتين على مستقيم).

3) $\angle 2$ و $\angle 3$ متكاملتان (تعريف الزاويتين المتكاملتين).

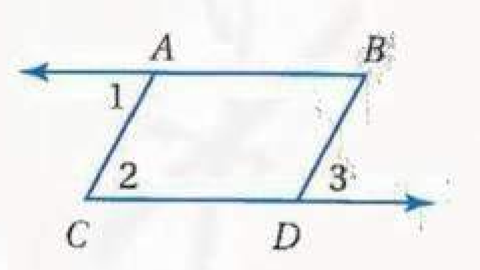
4) $\angle 1 \cong \angle 3$ (خاصية التعدي).

5) $l \parallel m$ (عكس مسلمة الزاويتين المتناظرتين).





برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين لكلٍّ مما يأتي:



15) **المعطيات:** $\angle 1 \cong \angle 3$

$\overline{AC} \parallel \overline{BD}$

المطلوب: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

<u>العبارات (المبررات)</u>

1) $\angle 1 \cong \angle 3,\ \overline{AC} \parallel \overline{BD}$ (مُعطى)

2) $\angle 3 \cong \angle 2$ (مسلّمة الزاويتين المتناظرتين)

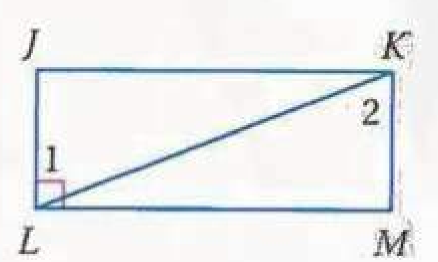
3) $\angle 2 \cong \angle 1$ (خاصية التعدّي)

4) $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ (إذا كانت الزاويتان المتبادلتان متطابقتين، فإن المستقيمين متوازيان).

16) **المعطيات:** $\angle 1 \cong \angle 2$

$\overline{LJ} \perp \overline{ML}$

المطلوب: $\overline{KM} \perp \overline{ML}$







العبارات (المبررات)

1) $\angle 1 \cong \angle 2, \overline{LJ} \perp \overline{ML}$ (مُعطى)

2) $\overline{LJ} \parallel \overline{KM}$ (إذا كانت الزاويتان المتبادلتان داخليًا متطابقتين، فإن المستقيمين متوازيان).

3) $\overline{KM} \perp \overline{ML}$ (نظرية القاطع العمودي)

برهان: اكتب برهانًا حرًّا لكلٍّ من النظريتين الآتيتين:

17) النظرية 2.7

المعطيات: $\angle 1 \cong \angle 2$

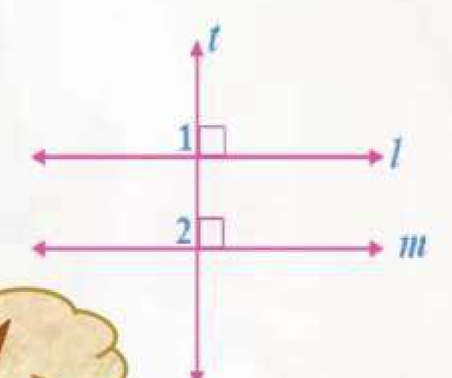
المطلوب: $\ell \parallel m$

البرهان:

$\angle 2 \cong \angle 3$ لأنهما متقابلتان بالرأس،

ومن ذلك $\angle 1 \cong \angle 3$ باستعمال خاصية التعدي.

وبما أن $\angle 1$ و $\angle 3$ زاويتان متناظرتان ومتطابقتان، فإن $\ell \parallel m$.



18) النظرية 2.8

المعطيات: $\ell \perp t , m \perp t$

المطلوب: $\ell \parallel m$

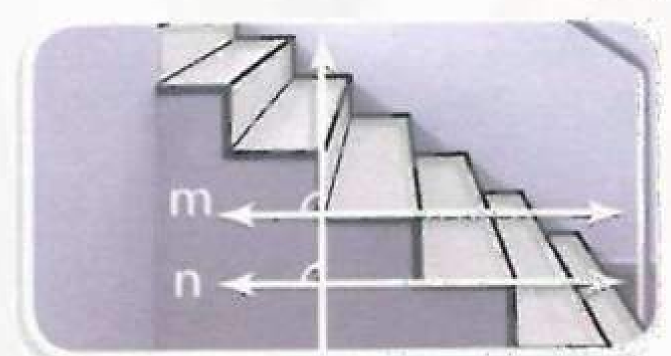
الرجوع

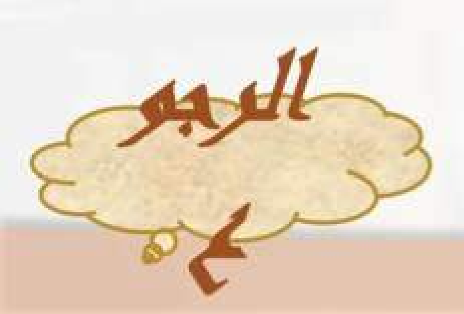


البرهان: بما أن $t \perp \ell$ و $t \perp m$، فإن قياس كلٍّ من $\angle 1$ و $\angle 2$ يساوي $90°$. وبما أن $\angle 1$ و $\angle 2$ لهما القياس نفسه، فإنهما متطابقتان، وبحسب عكس مسلّمة الزاويتين المتناظرتين يكون $m \parallel \ell$.

19) **درج:** ما العلاقة بين حوافِّ أسطح الدرجات في الشكل المجاور؟ برر إجابتك.

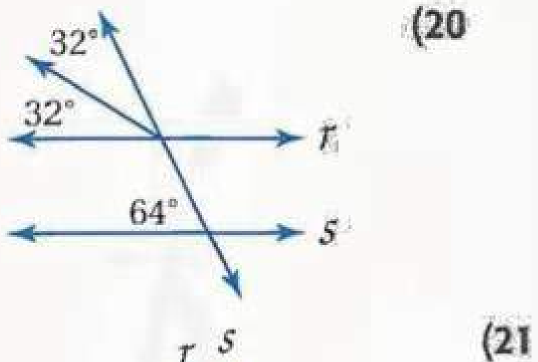
حواف أسطح الدرجات متوازية؛
لأن الزاويتين المتناظرتين متطابقتين.





حدّد ما إذا كان المستقيمان r, s متوازيين أم لا في كلٍّ مما يأتي. برّر إجابتك.

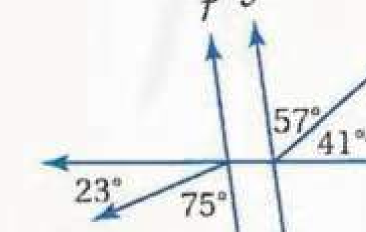
(20



$$32 + 32 = 64$$

الزاويتان المتناظرتان متطابقتان؛ r □ s
لذا فإن المستقيمين متوازيان.

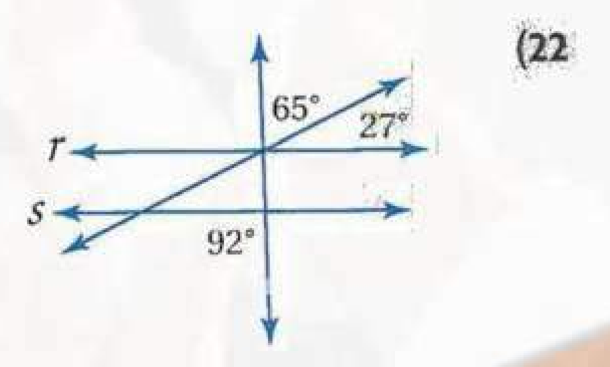
(21



$$57^{\circ} + 41^{\circ} = 98^{\circ}$$
$$75^{\circ} + 23^{\circ} = 98^{\circ}$$

الزاويتان المتبادلتان خارجيا متطابقتان؛ r □ s
لذا فإن المستقيمين متوازيان.

(22



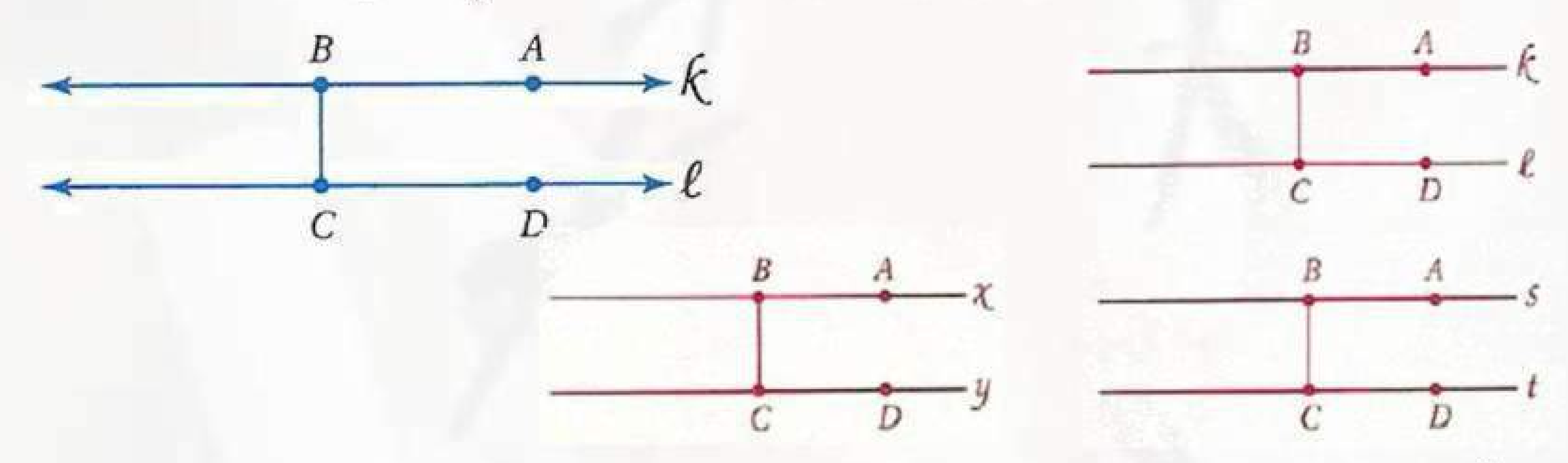
$$65^{\circ} + 27^{\circ} = 92^{\circ}$$

الزاويتان المتبادلتان خارجيا متطابقتان؛ r □ s
لذا فإن المستقيمين متوازيان.



23) **تمثيلات متعددة:** سوف تستكشف في هذه المسألة أقصر مسافة بين مستقيمين متوازيين.

a) **هندسيًا:** ارسم ثلاثة أزواج من المستقيمات المتوازية x و y، s و t، k و ℓ، وارسم أقصر قطعة مستقيمة $\overline{BC}$ بين كل مستقيمين متوازيين، وعيِّن النقطتين A, D كما في الشكل أدناه.



b) **جدوليًا:** قِس $\angle ABC$ و $\angle BCD$ في كل زوج، ثم أكمل الجدول.

$m\angle BCD$	$m\angle ABC$	زوج المستقيمات المتوازية
90°	90°	ℓ و k
90°	90°	t و s
90°	90°	y و x



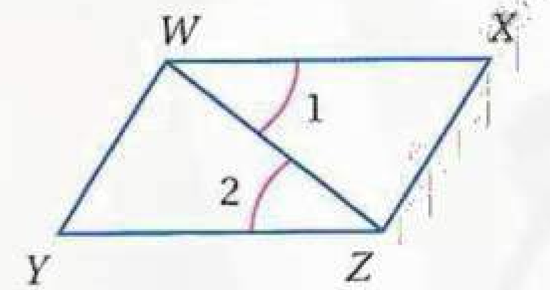
c) **لفظيًّا:** ضع تخمينًا حول الزاوية بين أقصر قطعة مستقيمة وكلٍّ من المستقيمين المتوازيين.

قياس الزاوية التي تكوّنها القطعة المستقيمة مع المستقيمين المتوازيين . $90°$

24) **اكتشف الخطأ:** يحاول كلٌّ من سامي ومنصور تحديد المستقيمات المتوازية في الشكل المجاور. فقال سامي: بما أن $\angle 2 \cong \angle 1$ ، إذن

$\overline{WY} \parallel \overline{XZ}$. أما منصور فلم يوافقه وقال: بما أن $\angle 2 \cong \angle 1$ ، إذن

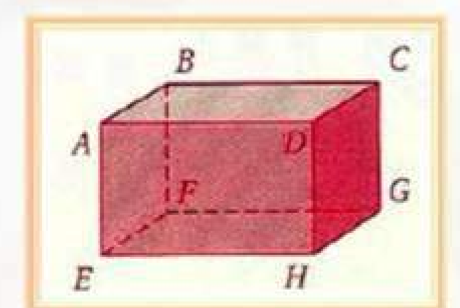
$\overline{WX} \parallel \overline{YZ}$. أيٌّ منهما على صواب؟ وضّح إجابتك.



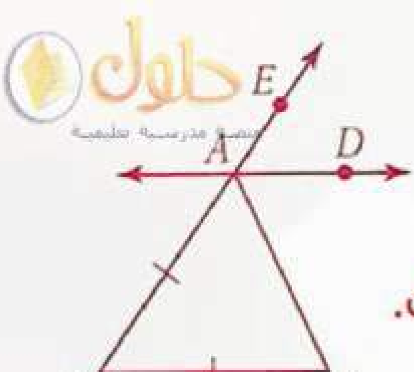
منصور؛ بما أن $\angle 1$، $\angle 2$ متبادلتان داخلياً، فإن $\overline{WX} \parallel \overline{YZ}$.

25) **تبرير:** هل تبقى النظرية 2.8 صحيحة إذا كان المستقيمان لا يقعان في المستوى نفسه؟ ارسم شكلًا يبرر إجابتك.

لا؛ إجابة ممكنة: في الشكل أدناه، $\overline{AB} \perp \overline{BC}, \overline{GC} \perp \overline{BC}$ ، لكن $\overline{AB}$ ليس عموديًّا على $\overline{GC}$.







26) **مسألة مفتوحة:** ارسم المثلث ABC.

a) أنشئ مستقيمًا يوازي $\overline{BC}$ ويمر بالنقطة A.

b) استعمل القياس؛ لتتحقق من أن المستقيم الذي رسمته يوازي $\overline{BC}$.

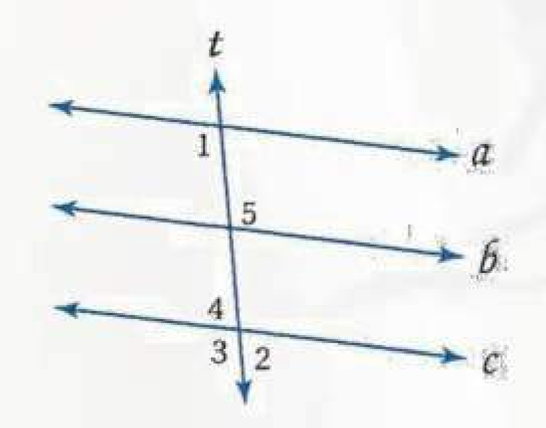
باستعمال المسطرة نجد أن البعد بين المستقيمين ثابت، لذا فهما متوازيان.

c) أثبت صحة الإنشاء رياضيًا. $\overleftrightarrow{AB}$ قاطع لكلٍّ من $\overleftrightarrow{BC}$ و $\overleftrightarrow{AD}$

ونُسخت $\angle ABC$ لإنشاء $\angle EAD$ ؛ لذا $\angle EAD \cong \angle ABC$،

$\angle ABC$ و $\angle EAD$ متناظرتان، وحسب عكس مسلمة

الزاويتين المتناظرتين فإن $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{AD}$.



27) **تحدٍّ:** استعمل الشكل المجاور.

a) إذا كان: $m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$، فبرهن أن $a \parallel c$.

نعلم أن $m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$. بما أن $\angle 2$ و $\angle 3$ متجاورتان على مستقيم، فإن $m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$.

وبالتعويض $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 2 + m\angle 3$.

وبطرح $m\angle 2$ من كلا الطرفين نحصل على $m\angle 1 = m\angle 3$.

أي أن $\angle 3 \cong \angle 1$ حسب تعريف الزوايا المتطابقة، لذلك فإن $a \parallel c$؛ لأن الزاويتين المتناظرتين متطابقتان.





b) إذا كان: $a \parallel c$ و $m\angle 1 + m\angle 3 = 180°$،
فبرهن أن $t \perp c$.

نعلم أن $a \parallel c$ و $m\angle 1 + m\angle 3 = 180$.

بما أن $\angle 1$ و $\angle 3$ متناظرتان، فإنهما متطابقتان وقياساهما متساويان.

وبالتعويض: $m\angle 3 + m\angle 3 = 180°$ أو $2m\angle 3 = 180$. وبقسمة كلا

الطرفين على 2 ، نحصل على $m\angle 3 = 90°$ ؛ لذلك $t \perp c$ لأنهما

يشكلان زاوية قائمة.

28) اكتب: لخّص الطرائق الخمس التي استُعملت في هذا الدرس لإثبات توازي مستقيمين.

استعمل زاويتين متبادلتين خارجياً ناتجتين عن مستقيمين وقاطع، وبيّن أنهما متطابقتان.
أو بيّن أن زاويتين متحالفتين متكاملتان
أو بيّن أن زاويتين متبادلتين داخلياً متطابقتان
أو بيّن أن مستقيماً يقع في نفس المستوى عموديٌّ على كلا المستقيمين
أو بيّن أن الزوايا المتناظرة متطابقة.





٢-٣ ميل المستقيم
Slope Of Line

فيما سبق:

درستُ استعمال خصائص المستقيمات المتوازية لتحديد الزوايا المتطابقة.

والآن:

- أجد ميل المستقيم.
- أستعمل الميل لتحديد المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة.

المفردات:

الميل
slope

معدّل التغير
rate of change

لماذا؟



تستعمل لوحات مرورية لتنبه السائقين إلى حالة الطريق. فاللوحة المجاورة تشير إلى انحدار الطريق بنسبة 6% . وهذا يعني أن الطريق ترتفع أو تهبط بمقدار 6m رأسيًّا لكل 100m أفقيًّا.

ميل المستقيم: درست سابقًا حساب ميل المستقيم في المستوى الإحداثي باستعمال أي نقطتين عليه. وعرفت أنه نسبة الارتفاع الرأسي إلى المسافة الأفقية.

$$\text{الميل} = \frac{\text{الارتفاع الرأسي}}{\text{المسافة الأفقية}}$$



مفهوم أساسي

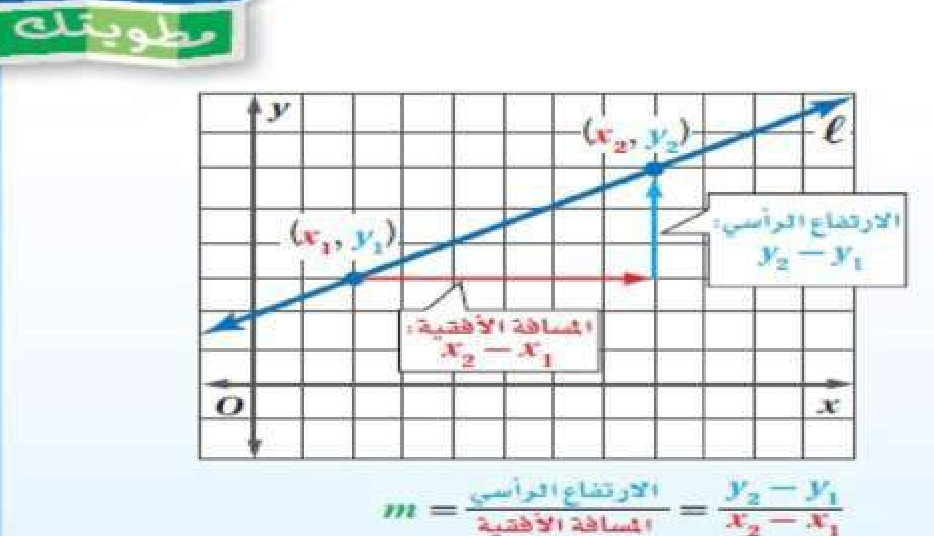
أضف إلى مطويتك

ميل المستقيم

في المستوى الإحداثي ، ميل المستقيم هو نسبة التغير في اتجاه محور y إلى التغير في اتجاه محور x بين أي نقطتين عليه.

ويعطى الميل m لمستقيم يحتوي نقطتين إحداثياهما (x_1, y_1) و (x_2, y_2) بالصيغة:

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$، حيث $x_1 \neq x_2$.



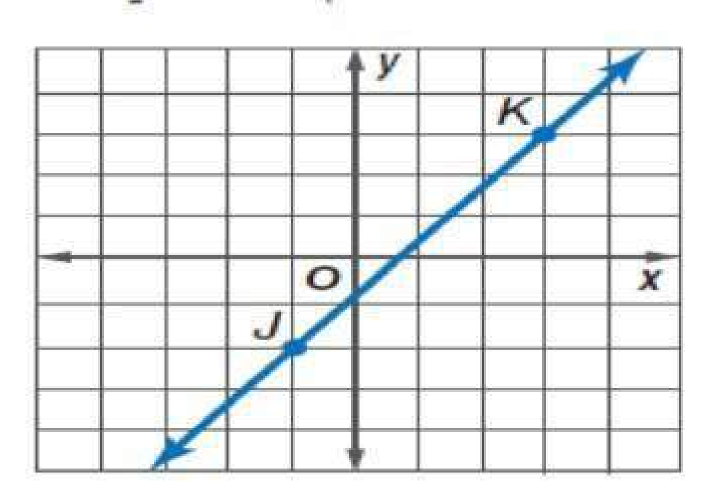
$m = \frac{\text{الارتفاع الرأسي}}{\text{المسافة الأفقية}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

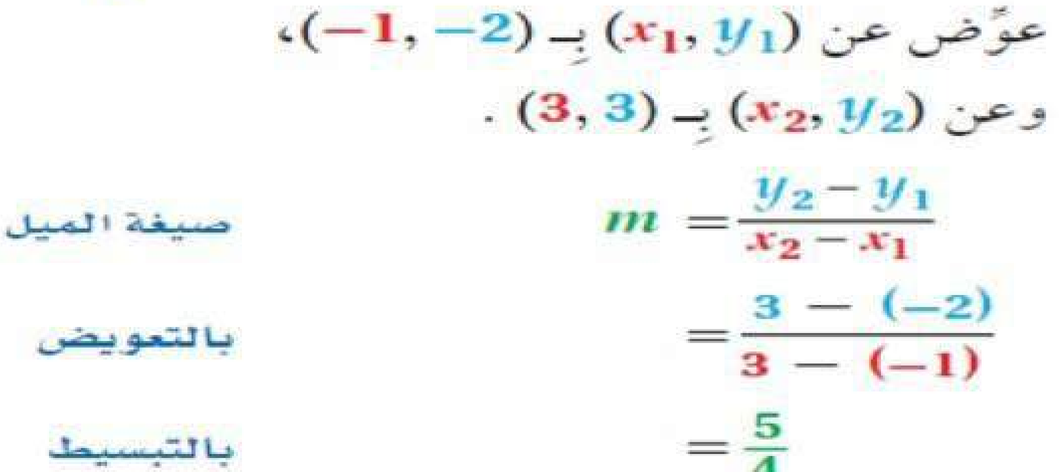
مثال 1

إيجاد ميل المستقيم

أوجد ميل كل مستقيم فيما يأتي:

(a

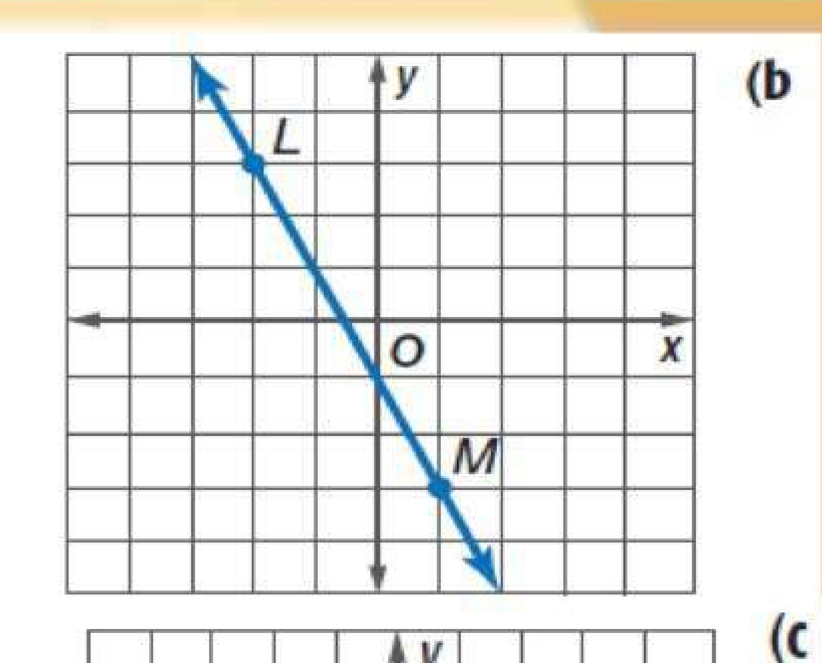




عوِّض عن (x_1, y_1) بـ $(-1, -2)$،
وعن (x_2, y_2) بـ $(3, 3)$.

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	صيغة الميل
$= \frac{3 - (-2)}{3 - (-1)}$	بالتعويض
$= \frac{5}{4}$	بالتبسيط



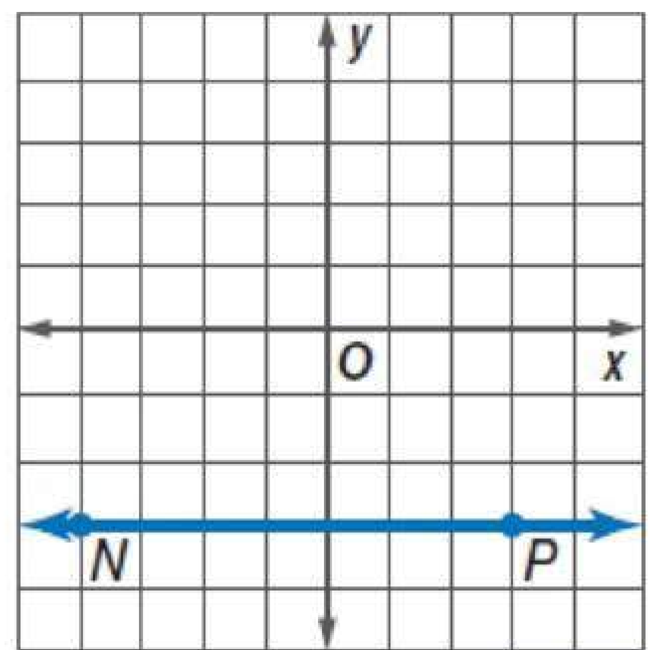


$(x_1, y_1) = (-2, 3), (x_2, y_2) = (1, -3)$

صيغة الميل $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

بالتعويض $= \frac{-3 - 3}{1 - (-2)}$

بالتبسيط $= -2$



$(x_1, y_1) = (-4, -3), (x_2, y_2) = (3, -3)$

صيغة الميل $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

بالتعويض $= \frac{-3 - (-3)}{3 - (-4)}$

بالتبسط $= \frac{0}{7} = 0$

الرجوع

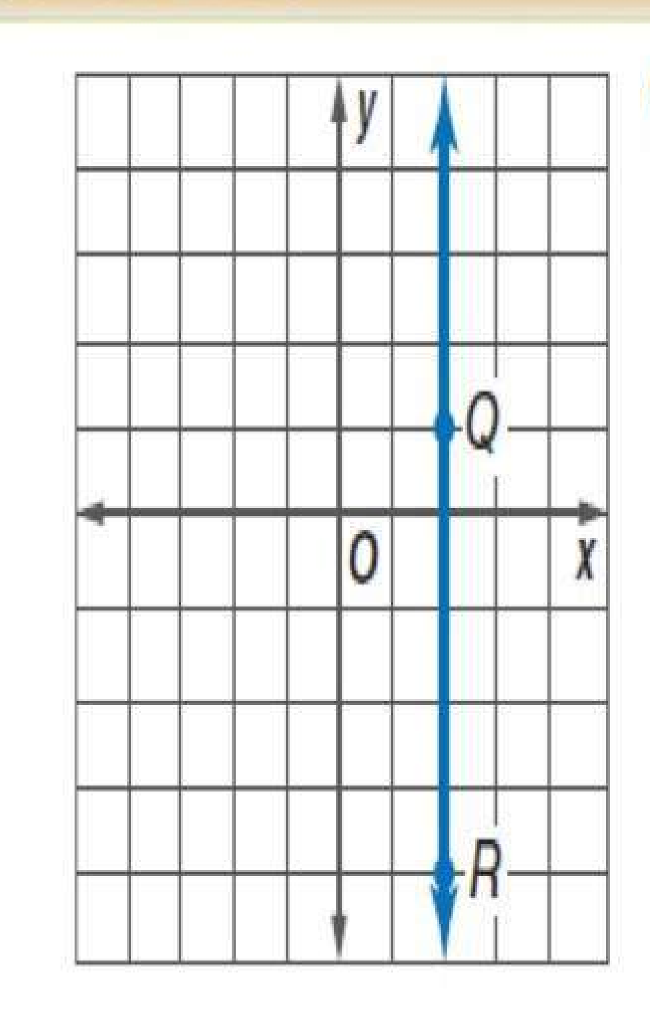


إرشادات للدراسة

القسمة على 0

ميل المستقيم في المثال 1d غير معرّف؛ لأنه لا يوجد عدد تضربه في 0 يُعطي 5−. وبما أن هذا صحيح لأي عدد، فإن أي عدد مقسوم على 0 يمثل كمية غير معرّفة. ومن ذلك يكون ميل أي مستقيم رأسي غير معرّف.

(d



$(x_1, y_1) = (2, 1), (x_2, y_2) = (2, -4)$

صيغة الميل $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

بالتعويض $= \dfrac{-4 - 1}{2 - 2}$

بالتبسيط $= \dfrac{-5}{0}$

ميل هذا المستقيم **غير معرّف**.





٢-٣ ميل المستقيم

Slope Of Line

1A) المستقيم الذي يحتوي $(6, -2), (-3, -5)$

$$m = \frac{-5-(-2)}{-3-6}$$

$$m = \frac{1}{3}$$

1B) المستقيم الذي يحتوي $(8, -3), (-6, -2)$.

$$m = \frac{-2-(-3)}{-6-8}$$

$$m = \frac{-1}{14}$$





1C) المستقيم الذي يحتوي $(4, -3)$, $(4, 2)$.

$$m = \frac{-3 - (2)}{4 - 4} \qquad m = \frac{-5}{0}$$

الميل غير معرف

1D) المستقيم الذي يحتوي $(4, 3)$, $(-3, 3)$.

$$m = \frac{3 - 3}{4 - (-3)} \qquad m = 0$$





يوضح المثال 1 اربع حالات مختلفة للميل وهي :

ملخص المفهوم

أضف إلى مطويتك

حالات الميل

الميل موجب	الميل سالب	الميل يساوي صفرًا	الميل غير معرّف

يمكن تفسير الميل على أنه **معدّل التغير** في الكمية y بالنسبة إلى الكمية x. ويمكن استعمال ميل المستقيم أيضًا لتعيين إحداثيي أي نقطة على المستقيم.





مثال 2 من واقع الحياة — استعمال الميل معدلًا للتغير

طائرات: تحلّق طائرة في مسار جوي مستقيم يمر بمدينة الرياض ثم المدينة المنورة. إذا كانت الطائرة على بعد **500 km** من المدينة المنورة بعد **0.5 h** من مرورها فوق الرياض، ثم أصبحت على بعد **152 km** من المدينة المنورة بعد نصف ساعة أخرى. كم كان بعدها عن المدينة المنورة بعد **0.75 h** من مرورها فوق الرياض إذا كانت سرعتها ثابتة.

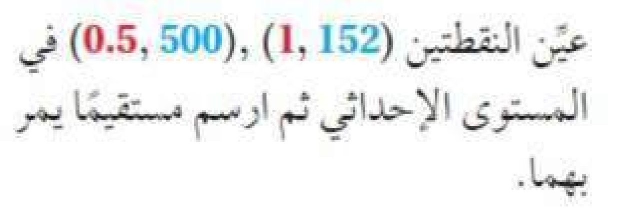


الربط مع الحياة

المسارات الجوية

توجد خرائط جوية تضبط مسارات الطائرات وارتفاعاتها وتضمن عدم تصادمها.

افهم: استعمل البيانات المعطاة لترسم المستقيم الذي يمثل البعد y بالكيلومترات كدالة في الزمن x بالساعات.



عيّن النقطتين (**0.5, 500**), (**1, 152**) في المستوى الإحداثي ثم ارسم مستقيمًا يمر بهما.

البعد عن المدينة المنورة

(0.5, 500)، (1.0, 152)

البعد (km) — الزمن (h)

المطلوب هو إيجاد البعد عن المدينة المنورة بعد 0.75 h .

خطط: أوجد ميل المستقيم في الشكل المجاور، واستعمله كمعدّل تغيّر المسافة بالكيلومترات في الزمن بالساعات لإيجاد بعد الطائرة عن المدينة المنورة بعد 0.75 h .





حل: استعمل صيغة الميل لإيجاد ميل المستقيم.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(152 - 500)\ \text{km}}{(1.0 - 0.5)\ \text{h}} = \frac{-348\ \text{km}}{0.5\ \text{h}} = \frac{-696\ \text{km}}{1\ \text{h}}$$

تحلّق الطائرة بسرعة 696 km/h .

وتشير الإشارة السالبة إلى تناقص المسافة مع مرور الزمن.

استعمل ميل المستقيم وإحدى النقطتين عليه لتجد البعد y عندما يكون الزمن $x = 0.75$.

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	صيغة الميل
$-696 = \frac{y_2 - 500}{0.75 - 0.5}$	$m = -696, x_1 = 0.5, y_1 = 500, x_2 = 0.75$
$-696 = \frac{y_2 - 500}{0.25}$	بالتبسيط
$-174 = y_2 - 500$	بضرب كلا الطرفين في 0.25
$326 = y_2$	بإضافة 500 إلى كل طرف

إذن كان بعد الطائرة عن المدينة المنورة بعد 0.75 h يساوي 326 km.

تحقق يمكننا من الشكل تقدير البعد عن المدينة المنورة بعد 0.75 h بأكثر من 300 km قليلًا.
وبما أن 326 قريبة من هذا التقدير فإن الإجابة معقولة. ✔





2) **مبيعات:** كانت مبيعات مصنع معلبات غذائية 20 مليون علبة عام 2003م، و200 مليون علبة عام 2008م، إذا حافظ المصنع على المعدل نفسه من الزيادة، فكم تكون مبيعاته من العلب عام 2012م ؟

نوجد الميل باستخدام (2008 , 200) , (2003, 20)

$$m = \frac{200 - 20}{2008-2003}$$

m = 36

نوجد المبيعات باستخدام (2008 , 200) , (2012, n)

$$36 = \frac{n - 200}{2012-2008}$$

N-200 = 144

N = 344



المبيعات =344 مليون



٢-٣ ميل المستقيم
Slope Of Line

المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة: يمكنك استعمال ميلي مستقيمين لتحدد ما إذا كانا متوازيين أو متعامدين. فالمستقيمات التي لها الميل نفسه تكون متوازية.

مسلمات

المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة

أضف إلى مطويتك

2.2 ميلا المستقيمين المتوازيين: يكون للمستقيمين غير الرأسيين الميل نفسه إذا وفقط إذا كانا متوازيين. وجميع المستقيمات الرأسية متوازية.

مثال: المستقيمان المتوازيان ℓ, m لهما الميل نفسه ويساوي 4.

الميل يساوي 4

الميل يساوي 4

الميل يساوي $-\frac{1}{4}$

2.3 ميلا المستقيمين المتعامدين: يكون المستقيمان غير الرأسيين متعامدين إذا وفقط إذا كان حاصل ضرب ميليهما يساوي -1. والمستقيمات الأفقية والرأسية متعامدة.

مثال: المستقيم m عمودي على المستقيم p، أو $m \perp p$.

ناتج ضرب الميلين هو -1 = $4 \cdot -\frac{1}{4} = -1$.





مثال 3 تحديد علاقات المستقيمات

حدّد ما إذا كان $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك إذا كانت $A(1,1), B(-1,-5), C(3,2), D(6,1)$، ومثّل كل مستقيم بيانيًا لتتحقق من إجابتك.

الخطوة 1: أوجد ميل كل مستقيم.

ميل $\overleftrightarrow{AB}$: $\frac{-5-1}{-1-1} = \frac{-6}{-2} = 3$

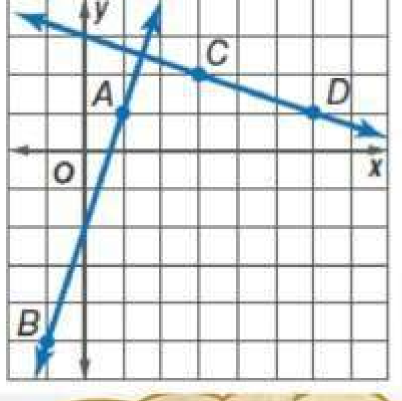
ميل $\overleftrightarrow{CD}$: $\frac{1-2}{6-3} = -\frac{1}{3}$

الخطوة 2: حدّد العلاقة إن وجدت بين المستقيمين.

بما أن ميلي المستقيمين غير متساويين فهما غير متوازيين. ولتحدد إن كانا متعامدين، أوجد ناتج ضرب ميليهما.

$3\left(-\frac{1}{3}\right) = -1$ ناتج ضرب ميلي $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$

بما أن حاصل ضرب ميلي $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{AB}$ يساوي -1 فهما متعامدان.

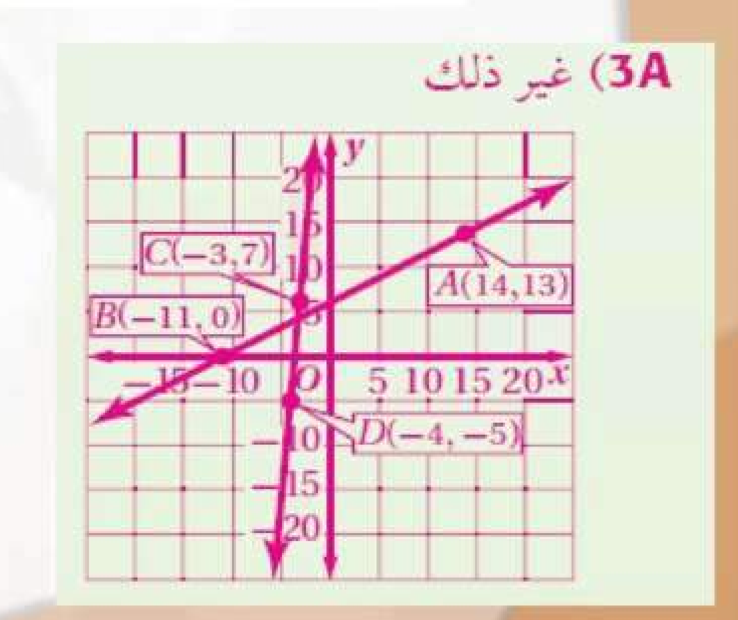


تحقق: يبدو من تمثيل المستقيمين بيانيًا أنهما يشكّلان زاوية قائمة عند نقطة تقاطعهما. ✓



حدد ما إذا كان $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{AB}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك في كل مما يأتي، ومثِّل كل مستقيم بيانيًّا لتتحقق من إجابتك.

3A) $A(14, 13), B(-11, 0), C(-3, 7), D(-4, -5)$



$$m1 = \frac{13 - (0)}{14 + 11} \qquad m1 = \frac{13}{25}$$

$$m2 = \frac{7 + 5}{-3 + 4} \qquad m2 = 12$$

غير ذلك

الرجوع

حدد ما إذا كان $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك في كل مما يأتي، ومثّل كل مستقيم بيانيًا لتتحقق من إجابتك.

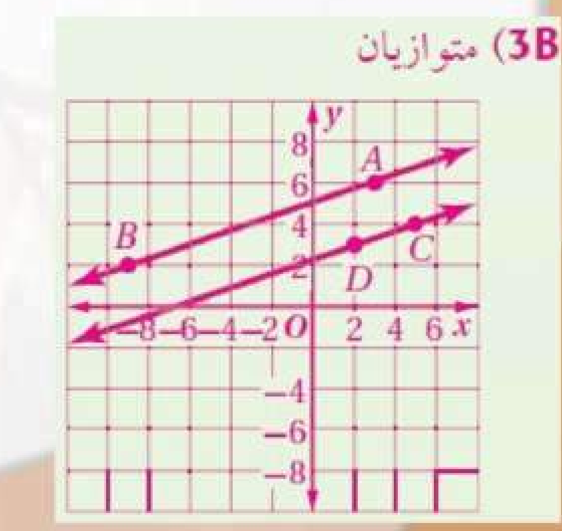
(3B $A(3, 6), B(-9, 2), C(5, 4), D(2, 3)$

$$m1 = \frac{6-2}{3+9} \qquad m1 = \frac{1}{3}$$

$$m2 = \frac{4-3}{5-2} \qquad m2 = \frac{1}{3}$$

$$m1 = m2$$

متوازيان







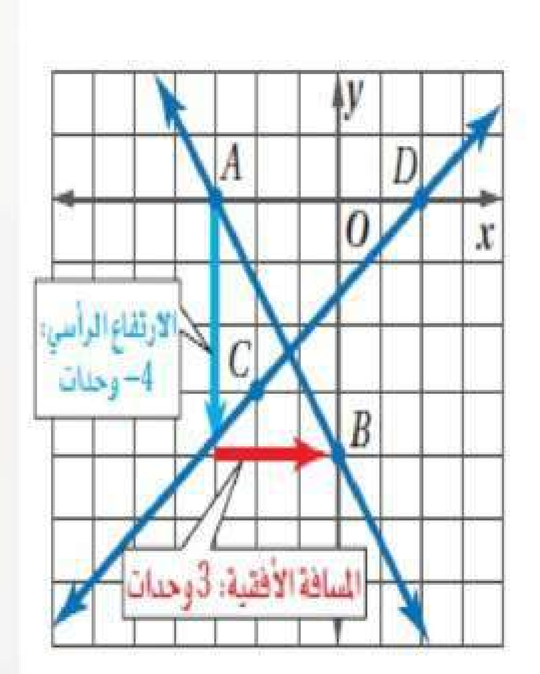


مثال 4 استعمال الميل لتمثيل المستقيم بيانيًا

مثل بيانيًّا المستقيم الذي يمر بالنقطة $A(-3, 0)$ ويعامد $\overleftrightarrow{CD}$ ، حيث $C(-2, -3), D(2, 0)$.

ميل $\overleftrightarrow{CD}$: $\dfrac{0-(-3)}{2-(-2)} = \dfrac{3}{4}$

بما أن $\dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{4}{3}\right) = -1$ ، فإن ميل المستقيم العمودي على $\overleftrightarrow{CD}$ والمار بالنقطة A يساوي $-\dfrac{4}{3}$.



لتمثيل المستقيم بيانيًّا، ابدأ من النقطة A، وتحرك 4 وحدات إلى أسفل، ثم 3 وحدات نحو اليمين، وسمِّ النقطة B ، ثم ارسم $\overleftrightarrow{AB}$.

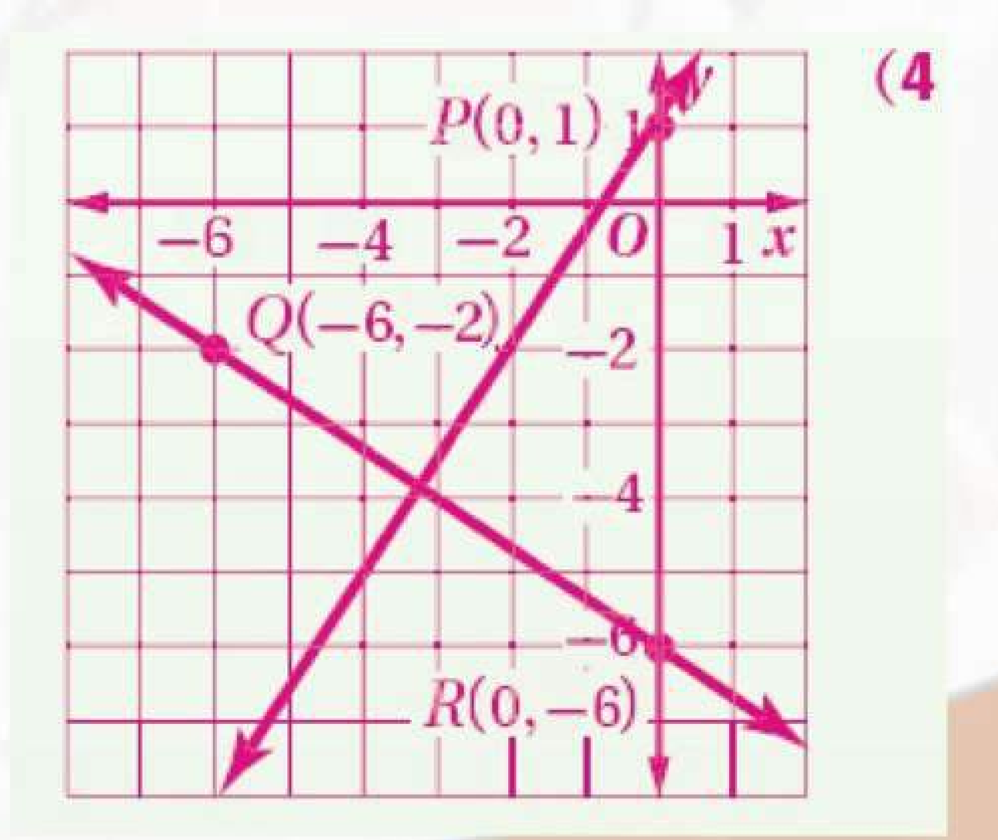






4) مثّل بيانيًّا المستقيم الذي يمر بالنقطة $P(0, 1)$ ويعامد $\overleftrightarrow{QR}$ ، حيث $Q(-6, -2), R(0, -6)$.

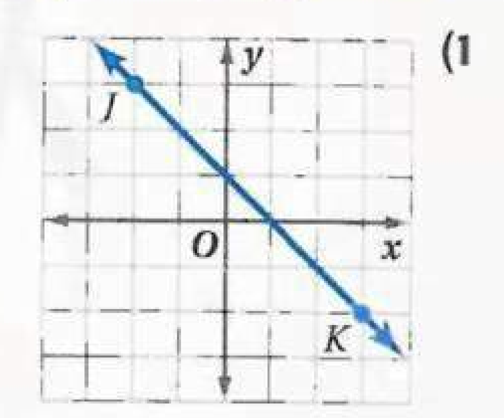
4)





أوجد ميل كل مستقيم فيما يأتي:

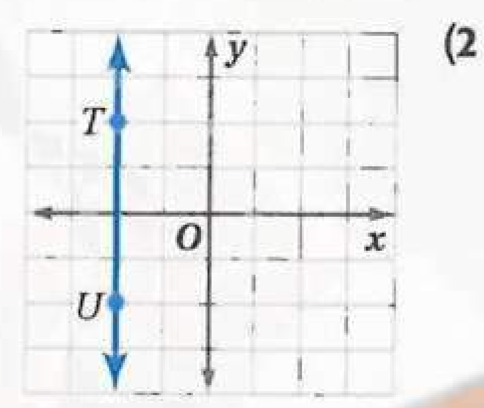
(1



النقطة j = (3 , -2) والنقطة k = (-2 , 3)

$$m = \overleftrightarrow{KJ} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-(-2)}{-2-3} = \frac{5}{-5} = -1$$

(2

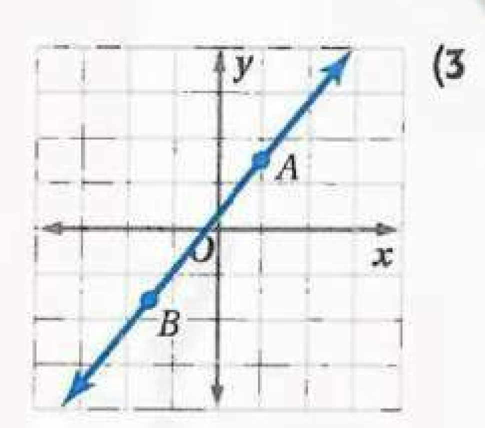


النقطة T = (-٢ , 2) والنقطة U = (-٢, -٢)

$$\overleftrightarrow{UT} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-(-2)}{-2-(-2)} = \frac{4}{0}$$

ميل المستقيم غير معرف

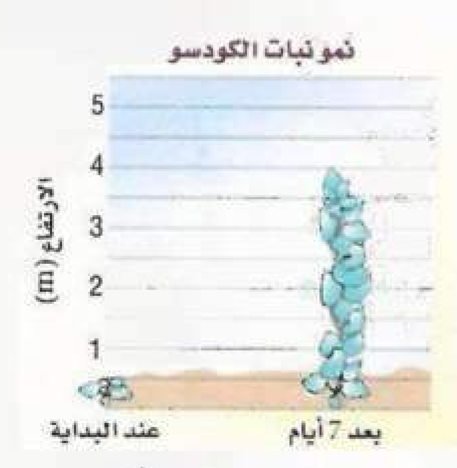




(3

النقطة A = (1 , 1.5) والنقطة B = (-1.5 , -1.5)

$$m = \overleftrightarrow{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1.5 - 1.5}{-1.5 - 1} = \frac{-3}{-2.5} = \frac{6}{5}$$

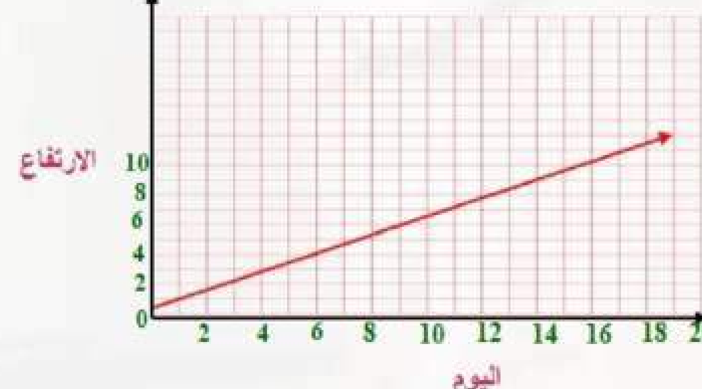


4) **علم النبات:** الكودسو (Kudzu) هو نبات متسلّق سريع النمو.
قيس ارتفاع نبتة عند يوم البداية فكان 0.5 m، وبعد سبعة أيام أصبح ارتفاعها 4 m

a) مثّل بيانيًا المستقيم الذي يمثل ارتفاع النبتة مع مرور الزمن.

b) ما ميل هذا المستقيم؟ وماذا يُمثّل؟

$\frac{1}{2}$ ؛ يزيد طول النبتة 0.5m كل يوم.



c) افترض أن هذه النبتة استمرت في النمو وفق هذا المعدل، فكم يكون ارتفاعها بعد 15 يومًا؟ 8m



حدّد ما إذا كان $\overleftrightarrow{WX}, \overleftrightarrow{YZ}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك في كلٍّ مما يأتي، ومثّل كل مستقيم بيانيًا لتتحقق من إجابتك.

5) $W(2, 4), X(4, 5), Y(4, 1), Z(8, -7)$

$$\overleftrightarrow{YZ} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-7-1}{8-4} = \frac{-8}{4} = -2$$

$$\overleftrightarrow{WX} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-4}{4-2} = \frac{1}{2}$$

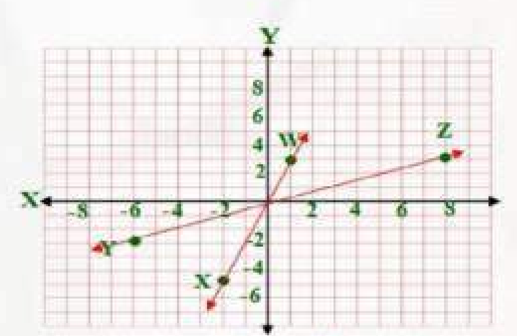
$$-2 \times \frac{1}{2} = -1$$

بما أن حاصل ضرب ميل كلا من المستقيمين = ١- إذن هما متعامدان

6) $W(1, 3), X(-2, -5), Y(-6, -2), Z(8, 3)$

$$\overleftrightarrow{YZ} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-(-2)}{8-(-6)} = \frac{5}{14}$$

$$\overleftrightarrow{WX} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-5-3}{-2-1} = \frac{-8}{-3} = \frac{8}{3}$$



بما أن حاصل ضرب ميل كلا من المستقيمين ≠ ١- ولا هما متساويان إذن هما غير ذلك



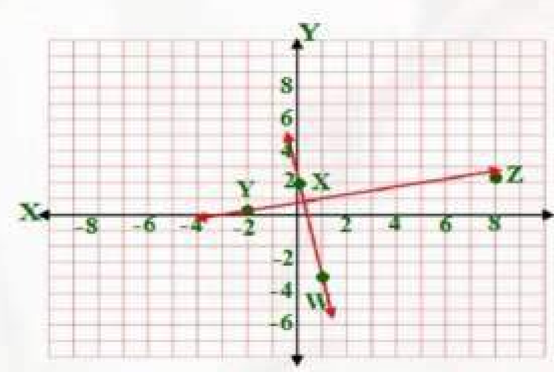
7) $W(-7,6), X(-6,9), Y(6,3), Z(3,-6)$

$$\overleftrightarrow{YZ} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-6-3}{3-6} = \frac{9}{3} = 3$$

$$\overleftrightarrow{WX} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9-6}{-6-(-7)} = \frac{3}{1} = 3$$

بما أن ميل كلا منهما متساويان إذن هما متوازيان .

8) $W(1,-3), X(0,2), Y(-2,0), Z(8,2)$



$$\overleftrightarrow{YZ} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-0}{8-(-2)} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$$\overleftrightarrow{WX} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-(-3)}{0-1} = \frac{5}{-1} = -5$$

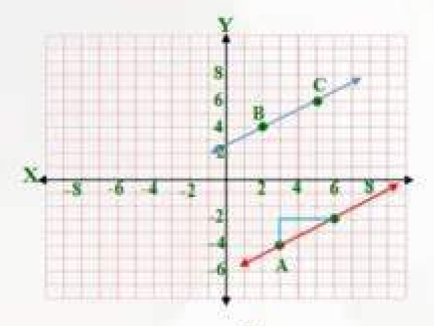
بما أن حاصل ضرب ميل كلا منهما يساوي ‎-١ إذن هما متعامدان .





مثّل بيانيًّا المستقيم الذي يحقق الشروط في كلٍّ مما يأتي:

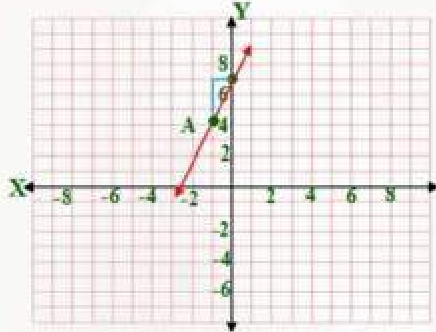
9) يمر بالنقطة $A(3, -4)$، ويوازي $\overleftrightarrow{BC}$ ، حيث $B(2, 4), C(5, 6)$.



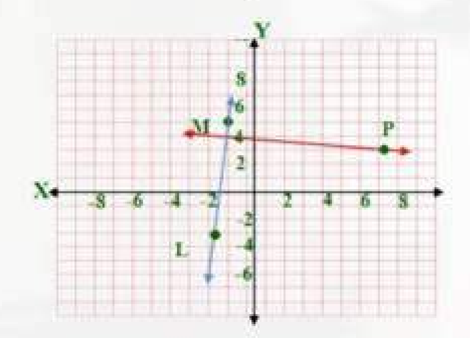
$$\overleftrightarrow{BC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 4}{5 - 2} = \frac{2}{3}$$

بما أن المستقيم الذي يمر بالنقطة (4− , 3) يوازي $\overleftrightarrow{BC}$
إذن ميله يساوي ميل $\overleftrightarrow{BC}$

10) ميله يساوي 3 ، ويمر بالنقطة $A(-1, 4)$.



11) يمر بالنقطة $P(7, 3)$، ويعامد $\overleftrightarrow{LM}$ ، حيث $L(-2, -3), M(-1, 5)$.



$$\overleftrightarrow{LM} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - (-3)}{-1 - (-2)} = 8$$

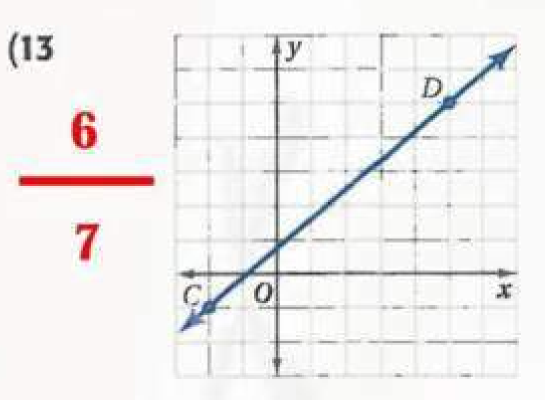
بما أن المستقيم الذي يمر بالنقطة (4− , 3) يوازي $\overleftrightarrow{LM}$ إذن
ميله يساوي ميل -١/٨





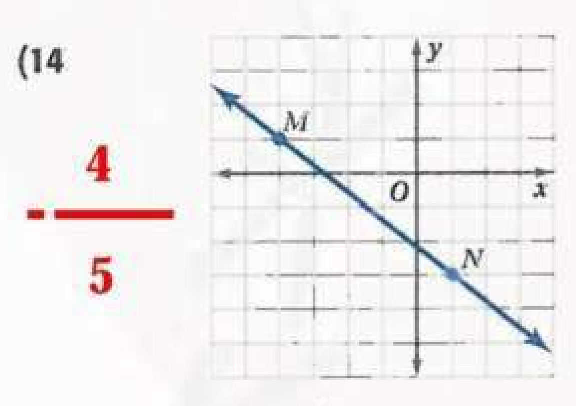
أوجد ميل كل مستقيم فيما يأتي:

(12



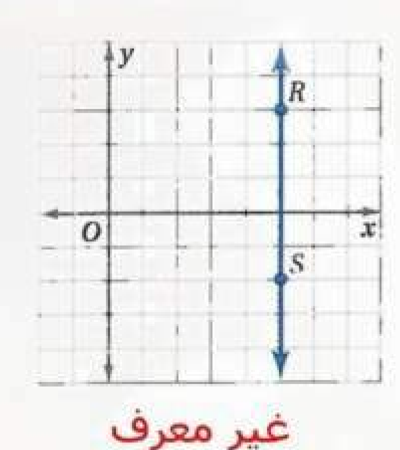
$\frac{6}{7}$

(13



$-\frac{4}{5}$

(14



غير معرف

أوجد ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين المحددتين في كلٍّ مما يأتي :

(15 $C(3, 1), D(-2, 1)$

15)

$$m = \overleftrightarrow{CD} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-1}{-2-3} = \frac{0}{-5} = 0$$

(16 $E(5, -1), F(2, -4)$

16)

$$m = \overleftrightarrow{EF} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4-(-1)}{2-5} = \frac{-3}{-3} = 1$$

(17 $G(-4, 3), H(-4, 7)$

17)

$$m = \overleftrightarrow{GH} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7-3}{-4-(-4)} = \frac{4}{0}$$

(18 $J(7, -3), K(-8, -3)$

18)

$$m = \overleftrightarrow{JK} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3-(-3)}{-8-7} = \frac{0}{-15} = 0$$



حلول
منصة مدرسية تعليمية

(19 $P(-3,-5), Q(-3,-1)$

(20 $R(2,-6), S(-6,5)$

19)

$$m = \overleftrightarrow{PQ} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-(-5)}{-3-(-3)} = \frac{4}{0}$$

الميل غير معرف

20)

$$m = \overleftrightarrow{RS} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-(-6)}{-6-2} = \frac{11}{-8}$$

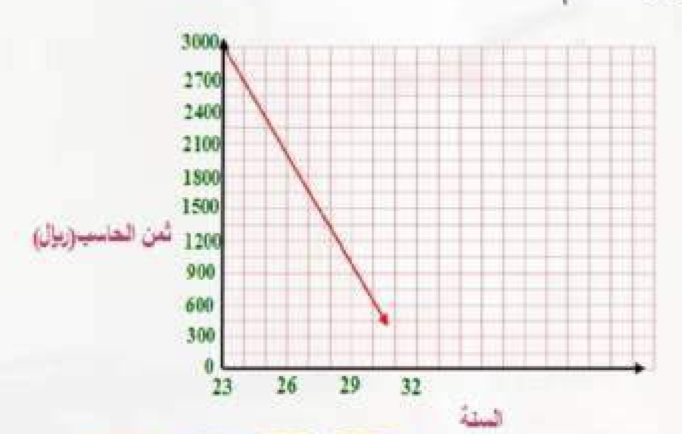
21) **حواسيب:** في عام 1423هـ كان ثمن حاسوب محمول 3000 ريال، وأصبح 1800 ريال في عام 1427هـ.

a) ارسم مستقيمًا يمثل توقعًا لسعر الحاسوب للسنوات من 1423هـ إلى 1427هـ.

b) كم ينخفض ثمن الحاسوب في كل سنة؟ 300 ريال

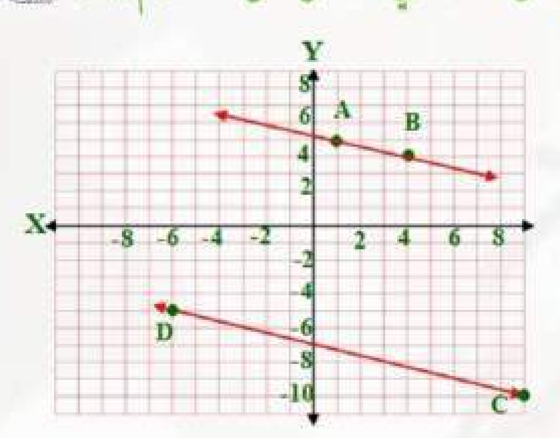
c) إذا استمر انخفاض السعر بالمعدل نفسه، فكم يكون ثمن الحاسوب عام 1430هـ؟

١٨٠٠ – ٣٠٠ – ٣٠٠ – ٣٠٠ = ٩٠٠ ريال



الرجوع

حدّد ما إذا كان $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك في كلٍّ مما يأتي، ومثّل كل مستقيم بيانيًا لتتحقق من إجابتك.

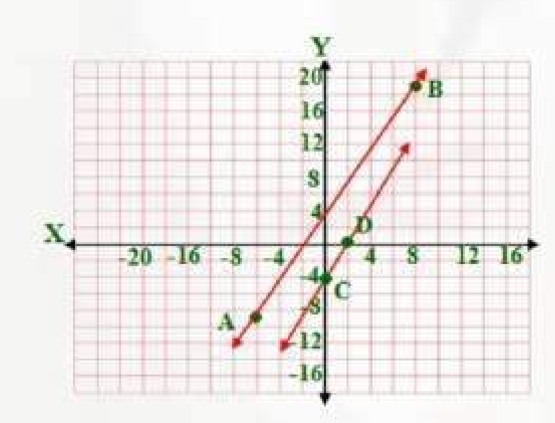


(22 $A(1, 5), B(4, 4), C(9, -10), D(-6, -5)$

$$\overleftrightarrow{CD} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-5-(-10)}{-6-9} = \frac{5}{-15} = \frac{1}{-3}$$

$$\overleftrightarrow{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-5}{4-1} = \frac{-1}{3}$$

بما أن ميل كلا منهما متساويان إذن هما متوازيان



(23 $A(-6, -9), B(8, 19), C(0, -4), D(2, 0)$

$$\overleftrightarrow{CD} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-(-4)}{2-0} = \frac{4}{2} = 2$$

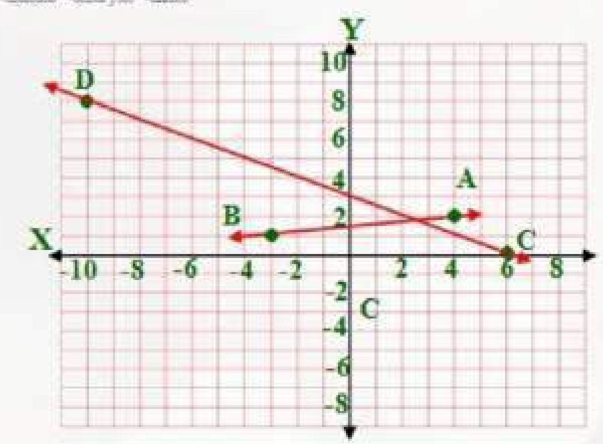
$$\overleftrightarrow{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{19-(-9)}{8-(-6)} = \frac{28}{14} = 2$$

بما أن ميل كلا منهما متساويان إذن هما متوازيان .





24) $A(4,2), B(-3,1), C(6,0), D(-10,8)$

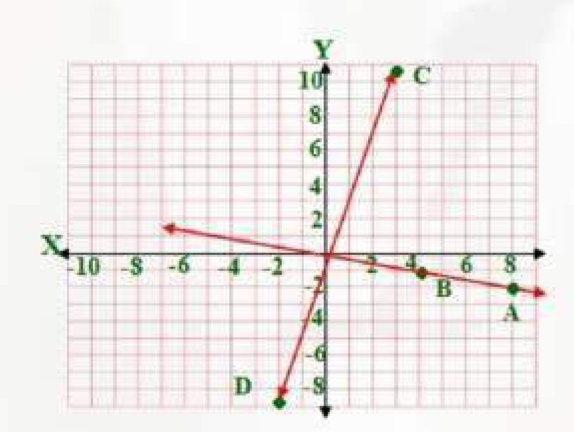


$$\overleftrightarrow{CD} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8-0}{-10-6} = \frac{8}{-16} = \frac{1}{-2}$$

$$\overleftrightarrow{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-2}{-3-4} = \frac{-1}{-7} = \frac{1}{7}$$

بما أن ميل كلا منهما ليسو متساويان ولا حاصل ضربهم =   إذن هما غير ذلك .

25) $A(8,-2), B(4,-1), C(3,11), D(-2,-9)$



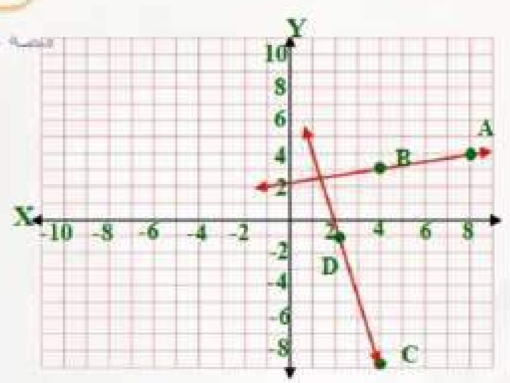
$$\overleftrightarrow{CD} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-9-11}{-2-3} = \frac{-20}{-5} = 4$$

$$\overleftrightarrow{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-(-2)}{4-8} = \frac{1}{-4}$$

بما أن حاصل ضرب ميل كلا منهم =   إذن هما متعامدان.



(26 $A(8,4), B(4,3), C(4,-9), D(2,-1)$

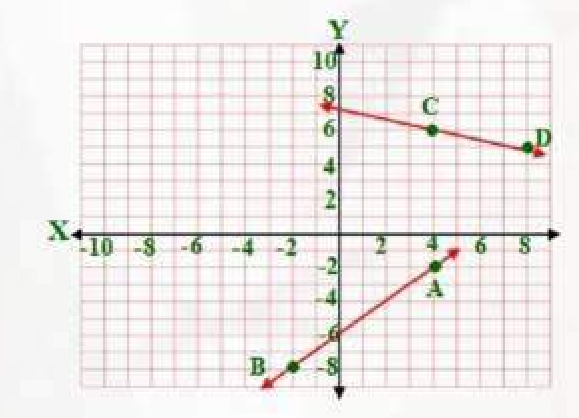


$$\overleftrightarrow{CD} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-(-9)}{2-4} = \frac{8}{-2} = -4$$

$$\overleftrightarrow{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-4}{4-8} = \frac{1}{4}$$

بما أن حاصل ضرب ميل كلا منهم = إذن هما متعامدان.

(27 $A(4,-2), B(-2,-8), C(4,6), D(8,5)$



$$\overleftrightarrow{CD} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-6}{8-4} = \frac{-1}{4}$$

$$\overleftrightarrow{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-8-(-2)}{-2-4} = \frac{-6}{-6} = 1$$

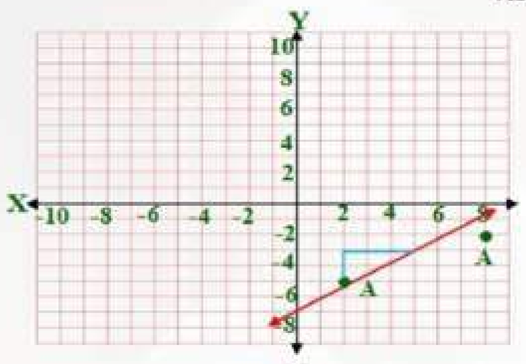
بما أن ميل كلا منهما ليسو متساويان ولا حاصل ضربهم = إذن هما غير ذلك .

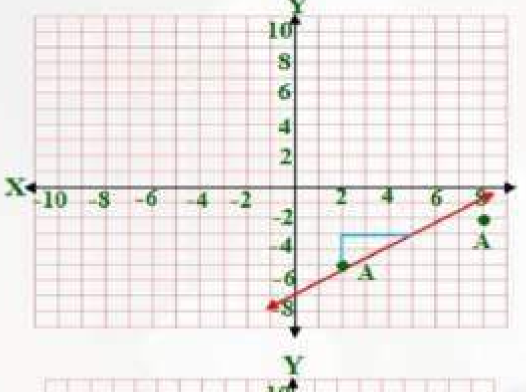




مثّل بيانيًا المستقيم الذي يحقق الشروط في كلٍّ مما يأتي:

28) يمر بالنقطة $A(2, -5)$، ويوازي $\overleftrightarrow{BC}$، حيث $B(1, 3), C(4, 5)$.

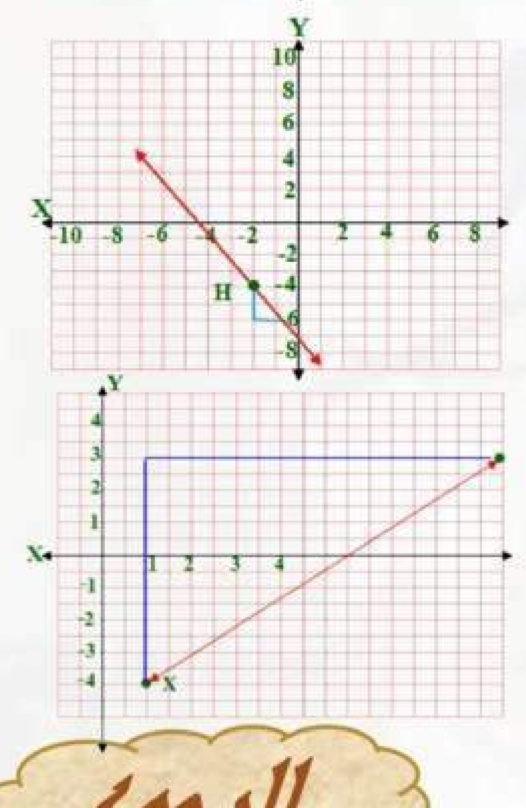




$$\overleftrightarrow{BC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 3}{4 - 1} = \frac{2}{3}$$

ابدأ من النقطة A وتحرك وحدتين لأعلى ثم تحرك ٣ وحدات ناحية اليمين.

29) ميله يساوي -2، ويمر بالنقطة $H(-2, -4)$.



ابدأ من النقطة H وتحرك وحدتين لأسفل ثم تحرك وحدة واحدة فقط ناحية اليمين.

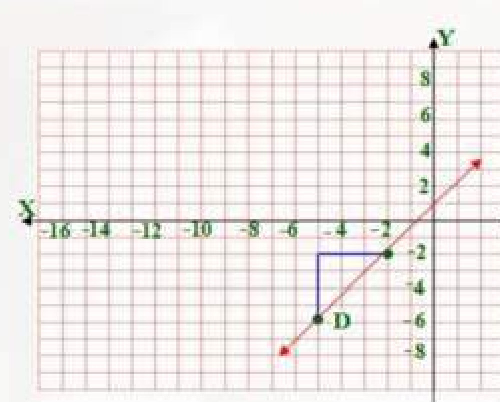
30) يمر بالنقطة $X(1, -4)$ ويوازي $\overleftrightarrow{YZ}$، حيث $Y(5, 2), Z(-3, -5)$.

$$\overleftrightarrow{YZ} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-5 - 2}{-3 - 5} = \frac{-7}{-8} = \frac{7}{8}$$

ابدأ من النقطة X وتحرك ٧ وحدات لأعلى ثم تحرك ٨ وحدات ناحية اليمين.

الرجوع

31) يمر بالنقطة $D(-5, -6)$ ويعامد $\overleftrightarrow{FG}$ ، حيث $F(-2, -9), G(1, -5)$.



$$\overleftrightarrow{FG} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-5-(-9)}{1-(-2)} = \frac{4}{3}$$

ابدأ من النقطة D وتحرك 4 وحدات لأعلى ثم تحرك 3 وحدات ناحية اليمين.

32) **سكان:** في عام 1412هـ كان عدد سكان مدينة الطائف 416121 نسمة ، وفي عام 1424هـ بلغ عدد سكانها 521273 نسمة.

a) ما المعدّل التقريبي لتغيُّر عدد سكان مدينة الطائف من عام 1412هـ إلى 1424هـ ؟

المعدل التقريبي = ٨٧٦٣ نسمة.

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{521273 - 416121}{2004 - 1992} = \frac{105152}{12} = 8762.66$$

b) إذا استمر ازدياد عدد السكان بالمعدّل نفسه، فكم نسمةً تتوقع أن يبلغ عدد سكان مدينة الطائف عام 1432هـ؟

عدد السكان في ١٤٣٢ = ٥٩١٣٧٧

$$8 \times 8763 = 70104$$
$$70104 + 521273 = 591377$$





حدد أي المستقيمين في السؤالين الآتيين له أكبر ميل :

33) المستقيم 1: (0, 5) و (6, 1)

المستقيم 2: (4, 10) و (−8, −5)

$$\overleftrightarrow{1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-1}{0-6} = \frac{4}{-6} = \frac{2}{-3}$$

$$\overleftrightarrow{2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{10-(-5)}{-4-(-8)} = \frac{15}{4} = \frac{5}{4}$$

المستقيم ٢ هو الأكبر لأن $\frac{2}{-3} < \frac{5}{4}$

34) المستقيم 1: (0, −4) و (2, 2)

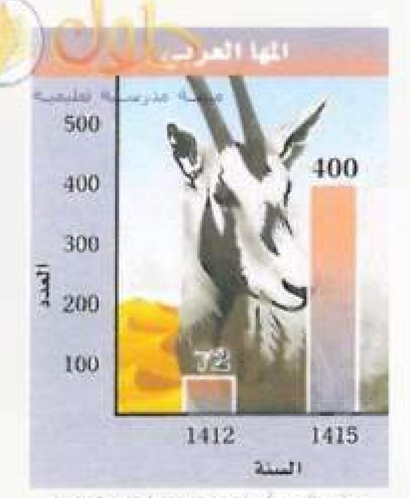
المستقيم 2: (0, −4) و (4, 5)

$$\overleftrightarrow{1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4-2}{0-2} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$\overleftrightarrow{2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4-5}{0-4} = \frac{-9}{-4} = \frac{9}{4}$$

المستقيم ١ هو الأكبر لأن ٣ > $\frac{9}{4}$





موقع الهيئة الوطنية لحماية الحياة الفطرية

35) **محمية طبيعية :** تؤوي محمية طبيعية حيوانًا مهددًا بالانقراض هو: المها العربي. ويوضح الشكل المجاور عدد المها العربي في المحمية عامَي 1412هـ وَ 1415هـ .

a) أوجد معدل التغيُّر لعدد حيوانات المها العربي في المحمية.

معدل تغيرالمها العربي =

$$109.33 = \frac{328}{3} = \frac{400-72}{1415-1412} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

b) مثّل بيانيًا المستقيم الذي يمثّل الزيادة في العدد.



c) إذا استمر النمو وفق هذا المعدل، فكم يكون عدد حيوانات المها العربي عام 1436هـ ؟

عدد المها العربي عام ١٤٣٦ :

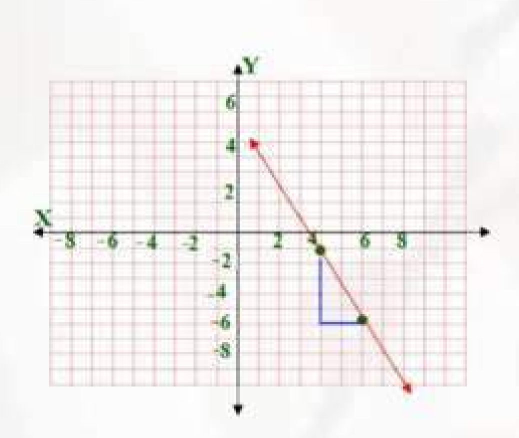
$$3024 \approx 3023.9992 = 400 + 109.333 \times 24$$





أوجد قيمة x أو y اعتمادًا على المعطيات في كلٍّ مما يأتي، ثم مثّل المستقيم بيانيًّا:

36) مستقيم يمر بالنقطتين $(4, -1), (x, -6)$ ، وميله يساوي $-\frac{5}{2}$



$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-6 - (-1)}{x - 4}$$

$$\frac{-5}{2} = \frac{-6 - (-1)}{x - 4}$$

$$2 \times (-6 - (-1)) = -5 \times (x - 4)$$

$$2 \times -5 = -5 \times x + 20$$

$$-10 - 20 = -5x$$

$$-30 = -5x$$

$$x = \frac{30}{5} = 6$$

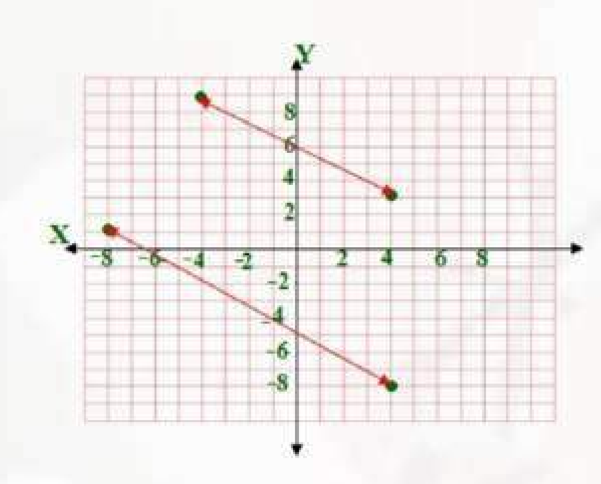
37) مستقيم يمر بالنقطتين $(4, 3), (-4, 9)$ ، ويوازي المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(4, y), (-8, 1)$

ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(4,3)$ $(-4,9)$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 9}{4 - (-4)} = \frac{-6}{8} = \frac{-3}{4}$$

ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(4,y)$ $(-8,1)$ $=$ $\frac{-3}{4}$ لأنهما متوازيان





$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - 1}{4 - (-8)}$$

$$\frac{y - 1}{12} = \frac{-3}{4}$$

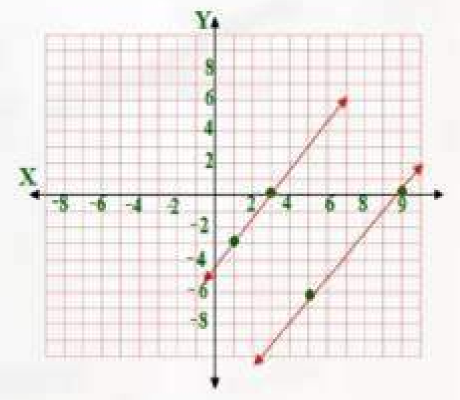
$$4y - 4 = -36$$
$$4y = -36 + 4$$
$$4y = -32$$
$$y = -8$$

38) مستقيم يمر بالنقطتين $(3, y)$, $(1, -3)$ ، ويوازي المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(9, y)$, $(5, -6)$

بما أن المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(3, y)$

و $(1, -3)$ يوازي المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(5, -6)$

و $(9, y)$ إذن ميل كل منهما متساويان



$$\frac{y - (-3)}{3 - 1} = \frac{y - (-6)}{9 - 5}$$

$$\frac{y + 3}{2} = \frac{y + 6}{4}$$

$$2y + 12 = 4y + 12$$
$$2y = 4y$$
$$2y - 4y = 0$$
$$-2y = 0$$
$$y = 0$$



39) **مدارس:** في عام 1421هـ كان عدد طلاب مدرسة الفتح 1125 طالبًا . وفي عام 1427هـ ازداد عدد الطلاب حتى بلغ 1425 طالبًا. وعندما أُنشئت مدرسة الأندلس عام 1422هـ كان عدد طلابها 1275 طالبًا. إذا ازداد عدد طلاب مدرسة الأندلس بنفس معدّل زيادة عدد طلاب مدرسة الفتح، فكم يصبح عدد طلاب مدرسة الأندلس عام 1427هـ ؟

مدرسة الفتح ١١٢٥ طالب سنة ١٤٢١

مدرسة الفتح ١٤٢٥ طالب سنة ١٤٢٧

مدرسة الأندلس ١٢٧٥ طالب سنة ١٤٢٢

مدرسة الفتح X طالب سنة ١٤٢٧

$$\frac{1125 - 1425}{1421 - 1427} = \frac{-300}{-6} = 50$$ معدل التغير لمدرسة الأندلس

إذن عدد طلاب مدرسة الأندلس عام ١٤٢٧ = ١٥٢٥ طالباً

$$\frac{1275 - x}{-5} = \frac{1275 - x}{1422 - 1427} = 50$$

$$50 \times -5 = 1275 - x$$

$$-250 - 1275 = -x$$

$$1525 = x$$

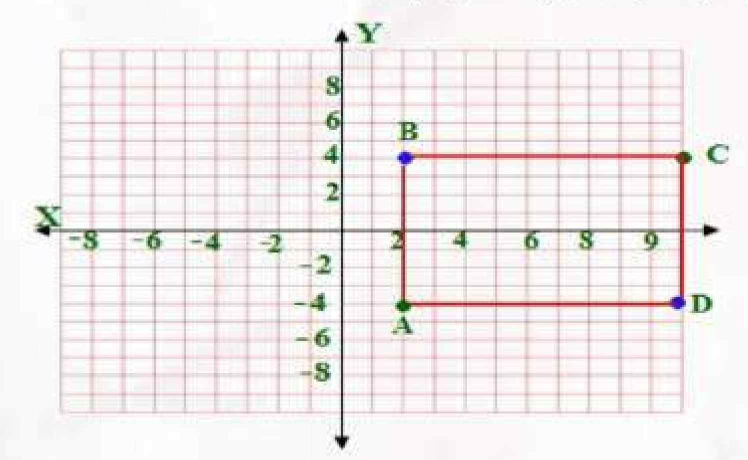


40) **اكتشف الخطأ:** حسب كلٌّ من خالد وطارق ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $Q(3, 5), R(-2, 2)$ هل إجابة أيٍّ منهما صحيحة؟ وضّح تبريرك.

خالد	طارق
$m = \frac{5-2}{-2-3} = -\frac{3}{5}$	$m = \frac{5-2}{3-(-2)} = \frac{3}{5}$

إجابة طارق صحيحة. فقط طرح خالد إحداثيي x بالتريب الخطأ.

41) **تبرير:** في المربع $ABCD$ إذا كان $A(2, -4), C(10, 4)$.



a) أوجد الرأسين الآخرين B, D للمربع.

b) أثبت أن $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$.

كلٌّ من ميلي $\overline{AB}$ و $\overline{DC}$ غير معرَّف، لذا فهما متوازيان.
وميل كلٍّ من $\overline{AD}$ و $\overline{BC}$ يساوي صفراً، لذا فهما متوازيان.

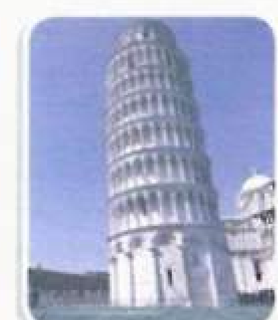
c) أثبت أن قياس كل زاوية من زوايا المربع يساوي $90°$

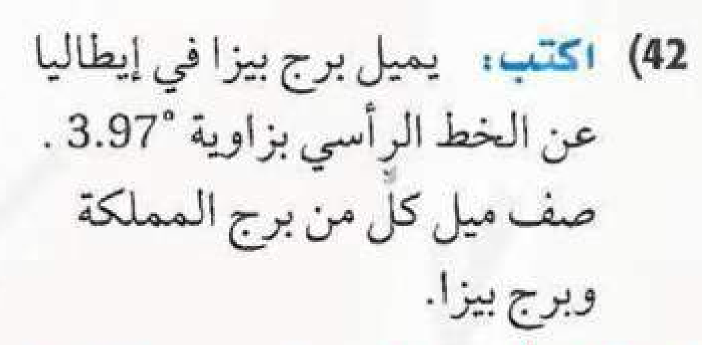
بما أن ميل $\overline{AB}$ غير معرَّف، وميل $\overline{BC}$ يساوي صفراً، فإن القطعتين متعامدان وتشكّلان زاوية قياسها $90°$. وهكذا لبقية الزوايا.











42) اكتب: يميل برج بيزا في إيطاليا عن الخط الرأسي بزاوية $3.97°$. صف ميل كلٍّ من برج المملكة وبرج بيزا.

بما أن برج المملكة رأسي فإن ميله برج بيزا فميله إما أن يكون سالباً أو موجباً؛ بحسب موقع النظر إليه.

43) تحدٍ: تعلّمت في هذا الدرس أن $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. اكتب برهانًا جبريًّا لتبيّن أنه يمكن أيضًا حساب الميل باستعمال المعادلة $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$.

إجابة ممكنة:

المعطيات: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

المطلوب: $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

البرهان:

العبارات (المبررات)

1) $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (مُعطى)

2) $m = \frac{-(y_2 - y_1)}{-(x_2 - x_1)}$ (خاصية الضرب)

3) $m = \frac{-y_2 + y_1}{-x_2 + x_1}$ (خاصية التوزيع)

4) $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ (خاصية الإبدال في الجمع)

